

Numerische Verzweigungsanalyse mit Anwendungen auf Rad–Schiene–Systeme

Von der Fakultät Maschinenbau der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Gunter Schupp

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Prof.E.h. Dr.h.c. W. Schiehlen

Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. habil. M. Arnold

Tag der mündlichen Prüfung: 12. März 2004

Institut B für Mechanik der Universität Stuttgart

2003

Vorwort und Dank

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Abteilung Fahrzeug–Systemdynamik des Deutschen Zentrums für Luft– und Raumfahrt (DLR) in Oberpfaffenhofen herangereift. Zu besonderem Dank verpflichtet bin ich Prof. Willi Kortüm, dem langjährigen Leiter dieser Abteilung, der leider viel zu früh verschieden ist.

Herr Prof. Werner Schiehlen hat bereitwillig die Aufgaben des Hauptberichters übernommen und den Fortgang dieser Arbeit stets mit wohlwollender Aufmerksamkeit und viel Vertrauen verfolgt. Herr Prof. Martin Arnold hat mir nicht nur seine Zeit als Mitberichter zur Verfügung gestellt, sondern war auch immer für Fragen und Diskussionen insbesondere betreffs der Kapitel 4 und 5 offen.

Der Anstoß zur Beschäftigung mit der hier behandelten Thematik ging von Herrn Dr. Alfred Jaschinski und Herrn Prof. Hans True (den beiden „alten Hasen“ der nichtlinearen Rad–Schiene–Dynamik) aus. Beide verfolgten den Fortgang meiner Entwicklungen mit ausgesprochen wachem und immer währendem Interesse sowie im festen Vertrauen in meine Fähigkeiten. Bei Auftreten von Problemen sowohl wissenschaftlicher als auch organisatorischer Art konnte ich stets auf die sofortige und zuverlässige Unterstützung von Herrn Dr. Jaschinski zählen. Auf Einladung von Herrn Prof. True hatte ich Gelegenheit, zwei sehr fruchtbare Forschungsaufenthalte von insgesamt sechs Monaten Dauer an der Technical University of Denmark (DTU) zu verbringen – damit hat er den eminent wichtigen Freiraum für eine intensive wissenschaftliche Arbeit geschaffen, aus der dann schließlich das Kapitel 4 als eigentlicher Grundstein hervorgegangen ist.

Einen nicht zu vernachlässigenden Anteil an dieser Arbeit hatten sämtliche derzeitigen und auch einige der mittlerweile ehemaligen Mitglieder der Abteilung Fahrzeug–Systemdynamik des DLR, mit denen zusammen arbeiten zu dürfen ich das Glück hatte. Genannt seien hier stellvertretend Herr Dipl.-Ing. Wolfgang Schwartz sowie Herr Dipl.-Ing. Martin Jochim und Herr Dr. Kaspar Schroeder. In dem sehr angenehmen Arbeitsklima entwickelte sich nicht nur so manches Fachgespräch, sondern ich konnte auch stets die zum wissenschaftlichen Arbeiten unabdingbare Unterstützung und Hilfe finden.

Im Rahmen dieser Arbeit musste ich auch auf Software Anderer zurückgreifen. Zu nennen wären hier vor allem das Verzweigungsprogramm PATH von Herrn Dr. Christian Kaas–Petersen (vermittelt durch Herrn Prof. Hans True), der erweiterte Integrationsalgorithmus DAGSL des Herrn Prof. Martin Arnold sowie das Mehrkörperprogramm SIMPACK der INTEC GmbH.

All den Genannten mein herzlichstes Dankeschön.

für Ilona

Inhaltsverzeichnis

Notation	IX
Kurzfassung / Abstract	XI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Literatur und Stand der Technik	3
1.3 Zielsetzung und Aufbau	6
2 Simulation der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen	9
2.1 Vom Rad–Schiene–System zum mathematischen Modell	10
2.1.1 Software zur Dynamiksimulation von Schienenfahrzeugen	10
2.1.2 Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen	13
2.1.3 Modellierung von Schienenfahrzeugen	15
2.1.4 Modellierung des Kontaktes zwischen Rad und Schiene	17
2.1.5 Spurführung von Schienenfahrzeugen: Sinuslauf, Schlingerlauf und Grenzzyklusverhalten	22
2.2 Übliche Berechnungsverfahren für Schienenfahrzeugmodelle	27
2.2.1 Lineare Systemanalyse	28
2.2.2 Nichtlineare Systemanalyse	31
3 Theorie und Berechnung von Verzweigungsdiagrammen	37
3.1 Verzweigungsdiagramme dynamischer Systeme	38
3.1.1 Definition wichtiger Begriffe	38
3.1.2 Verzweigungsdiagramme von Schienenfahrzeugen	40
3.2 Verzweigungsanalyse: Berechnung von Verzweigungsdiagrammen	43
3.2.1 Parametervariation: Der „Brute–Force“ Ansatz	44

3.2.2	Pfadverfolgung	45
3.2.3	Stabilitätsanalyse	49
3.2.4	Verzweigungspunkte und Verzweigungsverhalten	51
3.3	Zusammenfassende Gegenüberstellung der Berechnungsmethoden	54
4	Periodische Lösungen: Direkte Berechnung	57
4.1	Übersicht über numerische Verfahren	58
4.1.1	Anfangswertmethoden: Schießverfahren	58
4.1.2	Finite Differenzen	61
4.1.3	Frequenzbereichsverfahren: Harmonische Balance	63
4.2	Die Methode der Poincaré–Abbildung	64
4.3	Variationsdifferentialgleichungen zur robusten Bestimmung periodischer Lösungen	69
4.3.1	Problemanalyse bei Verwendung finiter Differenzen zur Gradienten- berechnung	69
4.3.2	Schießverfahren mit integrierter Sensitivitätsanalyse	72
4.3.3	Zur Berechnung der Sensitivitätsmatrix	75
4.3.4	Effiziente synchrone Integration von Nominal– und Sensitivitäts- system	76
4.3.5	Einbettung in einen Fortsetzungsalgorithmus	80
5	Verzweigungsanalyse von Mehrkörpersystemen in differentiell- algebraischer Formulierung	85
5.1	Zur Integration differentiell–algebraischer Gleichungssysteme	86
5.2	Koordinatenwahl zur effizienten Verzweigungsanalyse	90
5.3	Zustandsform der Bewegungsgleichungen eines MKS	93
5.3.1	Die Zustandsform: Definition und Transformationen	93
5.3.2	Anwendung der Zustandsform zur Pfadverfolgung	100
5.4	Stationäre Gleichgewichtslösungen differentiell–algebraischer Systeme . . .	103
5.4.1	Bestimmung stationärer Gleichgewichtslösungen	103
5.4.2	Stabilitätsanalyse stationärer Gleichgewichtslösungen	104
5.5	Periodische Lösungen differentiell–algebraischer Systeme	108
5.5.1	Vorbemerkungen: Die Poincaré–Abbildung auf einer Zwangs- mannigfaltigkeit	109

5.5.2	Stabilitätsanalyse periodischer Lösungen: Reduzierte Monodromie- matrix und reduzierte Poincaré–Abbildung	110
5.5.3	Bestimmung periodischer Lösungen: Die Methode der Poincaré– Abbildung mit Variationsdifferentialgleichungen	112
6	Ausgewählte Aspekte einer Implementierung	117
6.1	Gesamtkonzept einer Implementierung	117
6.2	Ausgewählte numerische Aspekte	121
6.2.1	System–Jacobimatrizen	122
6.2.2	Konsistente Anfangsbedingungen: Nominelles System und Variati- onsdifferentialgleichungen	122
6.3	Modellierungsaspekte	125
6.4	Numerische Untersuchungen anhand einfacher Testbeispiele	126
6.4.1	Mathematisches Pendel mit nichtlinearer Dämpfung	127
6.4.2	Rad–Schiene–System: Einzelradsatz	130
6.4.3	Rad–Schiene–System: Drehgestell eines Reisezugwagens	133
7	Anwendung auf das Modell eines Reisezugwagens	147
7.1	Simulationsmodell	147
7.1.1	Modellbeschreibung	147
7.1.2	Anmerkungen zur Modellierung	149
7.2	Verzweigungs– und Stabilitätsanalyse	150
8	Zusammenfassung	155
A	Zusammenstellung der wichtigsten Verfahrensparameter	159
B	Modelldaten der Schienenfahrzeugmodelle	162
B.1	Einzelradsatz	162
B.2	Drehgestell eines Reisezugwagens	163
B.3	Reisezugwagen Avmz	164
C	Ergebnisse der numerischen Untersuchungen	168
	Literaturverzeichnis	171

Notation, wichtige Symbole und Abkürzungen

Skalare, Vektoren, Matrizen

Skalare werden in Normaldruck, Vektoren und Matrizen in Fettdruck dargestellt; Vektoren kommen ausschließlich in der Form von Spaltenvektoren ($(n \times 1)$ -dimensionale Matrizen) zur Anwendung. Einzelne Komponenten einer Matrix sind durch rechtsseitige Indizierung gekennzeichnet: a_{ij} bezeichnet die Komponente aus Zeile i und Spalte j der Matrix \mathbf{A} . Die Transponierte der Matrix \mathbf{A} ist \mathbf{A}^T . Für Ableitungen nach der Zeit ist die Abkürzung $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ usw. gewählt, für Ableitungen nach anderen Variablen gilt auch die vereinfachte Schreibweise $\mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$.

Die Koordinaten zur eindeutigen Beschreibung des Systemzustandes werden je nach Bedarf in unterschiedlichen Vektoren zusammengefasst:

Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

\mathbf{p}	... Vektor der Lagekoordinaten, S. 12.
\mathbf{v}	... Vektor der Geschwindigkeitskoordinaten, S. 14.
$\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$... Zustandsvektor, S. 14.

Differentiell-algebraische Gleichungssysteme

$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{p}_a^T)^T$... Vektor der Lagekoordinaten, S. 12.
$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_u^T, \mathbf{v}_a^T)^T$... Vektor der Geschwindigkeitskoordinaten, S. 14.
$\boldsymbol{\lambda}$... Vektor der verallgemeinerten Zwangskräfte, S. 14.
$\boldsymbol{\mu}$... Vektor der algebraischen Hilfsvariablen, S. 89.
\mathbf{p}_u	... Vektor der unabhängigen Lagekoordinaten, S. 88/S. 93.
\mathbf{p}_a	... Vektor der abhängigen Lagekoordinaten, S. 88/S. 93.
\mathbf{v}_u	... Vektor der unabhängigen Geschwindigkeitskoordinaten, S. 88/S. 93.
\mathbf{v}_a	... Vektor der abhängigen Geschwindigkeitskoordinaten, S. 88/S. 93.
$\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$... Erweiterter Zustandsvektor, S. 91.
$\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$... Deskriptorvektor, S. 14/S. 91 (bzw. $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\mu}^T)^T$, S. 90).
$\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$... Zustandsvektor (gebildet allein aus den unabhängigen Minimalkoordinaten), S. 88/S. 91.

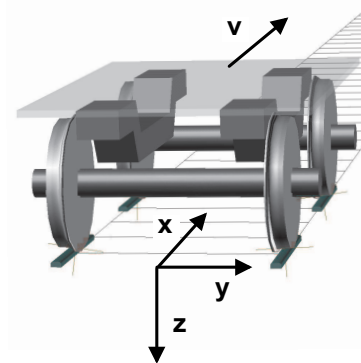
Die Anzahl der Komponenten des Vektors \mathbf{y} beträgt n_y usw. Im Falle eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDGL-System, s.u.) sind die drei Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} identisch, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} \equiv \mathbf{z}$.

Sonstiges

t	... Zeit.
p	... Variierter Systemparameter (hier meist skalar).

Abkürzungen

GDGL-System	Gewöhnliches <i>Differentialgleichungssystem</i>	S. 14.
DAGL-System	Differentiell- <i>algebraisches Gleichungssystem</i>	S. 14/S. 85.
VDGL	<i>Variationsdifferentialgleichungen</i>	S. 73/S. 114.
NLGS	<i>Nichtlineares Gleichungssystem</i>	S. 45.
RWP	<i>Randwertproblem</i>	S. 57/S. 109.
MKS	<i>Mehrkörpersystem</i>	S. 9.
GGL-Formulierung	<i>Gear-Gupta-Leimkuhler-Formulierung</i> eines DAGL-Systems	S. 90.

Orientierung des Inertialsystems

Dieselbe Orientierung weisen in der Regel auch alle anderen Koordinatensysteme im unausgelenkten/unverdrehen Nominalzustand auf; v ist die Fahrgeschwindigkeit.

Kurzfassung

Die Verzweigungsanalyse als rechnergestütztes Verfahren der nichtlinearen Systemdynamik hat zum Ziel, das dynamische Verhalten eines nichtlinearen Systems im eingeschwungenen Zustand in Abhängigkeit von einem oder mehreren Systemparametern zu beschreiben. Als Ergebnis wird in einem Verzweigungsdiagramm das Systemverhalten als stabil oder instabil sowie als stationär, periodisch, quasi-periodisch oder chaotisch charakterisiert. Von besonderem Interesse sind dabei so genannte Verzweigungspunkte – definierte Parameterwerte, an denen sich das dynamische Verhalten schlagartig und radikal verändert. Eine Verzweigungsanalyse baut entweder auf einer Parametervariation über numerische Zeitintegrationen auf oder aber auf der direkten Methode der Pfadverfolgung, implementiert in entsprechenden Softwarewerkzeugen.

Zur rechnergestützten Dynamiksimulation kompletter Schienenfahrzeuge im industriellen Entwurfsprozess werden kommerziell verfügbare Softwaresysteme eingesetzt, die auf der Methode der Mehrkörpersysteme aufbauen. Diese müssen allerdings über zusätzliche, spezifische Funktionalitäten verfügen: Beispielsweise muss sich die komplexe, hochgradig nichtlineare Kontaktgeometrie und –mechanik zwischen Rad und Schiene effizient modellieren und berechnen lassen.

Einen wichtigen Aspekt bei der Auslegung von Schienenfahrzeugen stellt die kritische Geschwindigkeit (Grenzgeschwindigkeit) dar. Bei einer Fahrt im ideal geraden Gleis trennt diese Grenze den Betriebsbereich eines Fahrzeuges mit gesichertem Abklingen einer (Anfangs)störung von dem zu vermeidenden Bereich des Aufklingens zu einer periodischen Bewegung im Gleis – einem so genannten Grenzzyklus. Mit den Methoden der linearen Systemanalyse kann zwar eine solche Grenzgeschwindigkeit bestimmt werden, allerdings erweist sich diese im Vergleich zu Messfahrten in den allermeisten Fällen als deutlich zu hoch. Die Verzweigungsanalyse ermöglicht hingegen eine exaktere Bestimmung dieser wichtigen Kenngröße.

Ziel der Arbeit ist eine Softwareumgebung, die eine weitgehend automatisierte, ingenieurmäßige Verzweigungsanalyse der Bewegungsgleichungen beliebiger Schienenfahrzeuge als Beispiel eines komplexen dynamischen Systems auf der Basis der Pfadverfolgung erlaubt. Dabei sind sämtliche Entwicklungen und Untersuchungen auf den technisch-industriell relevanten Bereich des stationären und des periodischen Bewegungsverhaltens beschränkt.

Das genannte Ziel wird in drei wesentlichen Entwicklungsschritten erreicht: Grundlage ist die Kopplung eines Softwaresystems zur Verzweigungsanalyse allgemeiner dynamischer Systeme mit einem Softwaresystem zur rechnergestützten Generierung und Analyse der Bewegungsgleichungen technisch-mechanischer Systeme. Ersteres baut auf dem Prinzip der Pfadverfolgung für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen auf, letzteres auf der Methode der Mehrkörpersysteme. Sowohl unter theoretischen als auch unter algorithmischen Gesichtspunkten erweist sich die direkte Bestimmung periodischer Lösungen als die bei weitem schwierigste und aufwändigste Teilaufgabe einer Verzweigungsanalyse. Erst die Erweiterung des bestehenden Algorithmus um die integrierte und synchrone Auswertung der Variationsdifferential- bzw. Sensitivitätsgleichungen zur direkten Bestimmung des Gradienten der Lösungstrajektorie bezüglich der Anfangsbedingungen und bezüglich

des variierten Systemparameters ermöglicht die zuverlässige und effiziente Erfüllung dieses Teilaspektes auch für große, komplexe Systeme. Im dritten und letzten Schritt erlaubt dann der Übergang auf eine differentiell–algebraische Formulierung der Bewegungsgleichungen die Anwendung auf Simulationsmodelle von Schienenfahrzeugen, die dem Stand der Technik entsprechen. Auf Modelle also, die auch im industriellen Rahmen häufig zur Auslegung der Fahrdynamik Verwendung finden. Die Grundidee besteht dabei in einer lokalen Parametrisierung der durch die algebraischen Gleichungen definierten Zwangsmannigfaltigkeit. Diese führt auf eine lokale Zustandsform der Bewegungsgleichungen, d.h. auf ein äquivalentes und minimales System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Die Verzweigungsanalyse des detaillierten Simulationsmodells eines Reisezugwagens beweist die Anwendbarkeit der im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Softwareumgebung auf komplexe, realistische und damit industriell relevante Modellierungen beliebiger Rad–Schiene–Systeme. Obgleich die gesamte Abhandlung sich stark auf die Untersuchung von Schienenfahrzeugen konzentriert, können die Algorithmen auch zur Verzweigungsanalyse anderer technisch–mechanischer Systeme eingesetzt werden; losgelöst von der Mehrkörpersystem–Software ist die Anwendung auf beliebige dynamische Systeme möglich. Dabei bewirkt gerade die Berücksichtigung der Variationsdifferentialgleichungen im Zusammenhang mit dem Übergang auf eine differentiell–algebraische Formulierung der Bewegungsgleichungen auch ganz allgemein eine erhebliche Ausweitung des Anwendungsspektrums der Software zur Verzweigungsanalyse.

Abstract

The purpose of a bifurcation analysis as a computer aided method for the examination of nonlinear dynamical systems is to describe the steady state of a system as a function of one or more system parameters. As a result, the system's behaviour is characterized within a bifurcation diagram as stable or unstable being either stationary, periodic, quasi-periodic or chaotic. Herein, so-called bifurcation points are of substantial interest, identifying parameter values for which the system's dynamical behaviour changes abruptly and radically. A bifurcation analysis is based either on numerical integrations combined within a parameter variation or on the more sophisticated direct method of path-following or continuation, implemented in the framework of appropriate software tools.

For analysing the dynamics of complete railway vehicles by computer simulations within an industrial design process, commercially available software is applied. Based on a multibody system approach, the suitable software has to provide very specific additional features, for example the efficient modelling and computation of the complex and highly nonlinear contact geometry and mechanics between wheel and rail.

A crucial aspect in the design of railway vehicles is to be found in the critical velocity. For a vehicle running on an ideally straight track, below this limiting velocity every motion of the vehicle relative to the track induced by an (initial) disturbance decays. For higher velocities, an (initial) disturbance results in a so-called limit cycle or hunting behaviour, i.e. a periodic motion relative to the track that has to be avoided in every day operations. Linear system analysis enables a type of limiting velocity to be determined, but usually this velocity is significantly higher than measured from field experiments. Whereas by applying a bifurcation analysis, this important design parameter can be calculated far more accurately.

The objective of this work is to provide a software environment for the automated bifurcation analysis of the equations of motion of arbitrary wheel-rail-systems as an example for complex technical dynamical systems. The applied algorithms are based on path-following methods. Algorithms, as well as analysis, are restricted to stationary and periodic behaviour, i.e. to the range of technical-industrial relevance within railway vehicle dynamics.

To achieve the described goal, three fundamental design steps are necessary: The basis is built by coupling a software tool for the bifurcation analysis of general dynamical systems with a software tool for the computer-aided generation and analysis of the equations of motion of general technical mechanical systems. The first applies the principle of path-following for systems of ordinary differential equations, the latter is based on a multibody system approach. It turned out that under a theoretical as well as under an algorithmic perspective the direct calculation of periodic solutions is by far the most difficult and costly part of every bifurcation analysis. To perform this task securely and efficiently even in the case of large and complex systems, the existing algorithm is enhanced by the integrated and synchronous evaluation of the variational equations and the sensitivity equations, respectively, yielding the trajectory's gradient with respect to the initial conditions and the varied system parameter in a direct manner. Finally, the

transition to a differential–algebraic formulation of the equations of motion enables the efficient bifurcation analysis of state-of-the-art simulation models for railway vehicles, the same detailed models which are frequently used in industry for designing a vehicle’s running behaviour. The basic concept comprises a local parametrisation of the constraint manifold defined by the algebraic equations. This leads to a local state space form of the equations of motion, an equivalent minimum system of ordinary differential equations.

The bifurcation analysis of a passenger car’s detailed simulation model demonstrates the applicability of the developed software environment for complex and realistic models of arbitrary wheel–rail–systems, being relevant for industrial applications. Although the complete study concentrates on railway vehicles, the developed algorithms are applicable to all types of technical mechanical systems; independent of the multibody system software, the analysis of arbitrary dynamical systems is also possible. In doing so, considering the system’s variational equations together with the transition to the differential–algebraic formulation of the equations of motion yields a significant enhancement to the range of applications for the bifurcation software.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Leiser, schneller, umweltfreundlicher – eine Auswahl grundlegender Forderungen an das zukünftige System Bahn, die sich zwar teilweise durchaus widersprechen, deren Erfüllung jedoch eine wesentliche Voraussetzung zum erfolgreichen Bestehen im Konkurrenzkampf mit den anderen bedeutenden Verkehrsträgern darstellt. Forderungen auch, die qualitativ unterschiedlich aber in gleichem Maße sowohl im Güter– als auch im Passagierverkehr und sowohl im Nah– als auch im Fernverkehr erhoben werden. Artikuliert werden diese Forderungen für den allgemeinen Fahrzeugbereich im Forschungsprogramm „Mobilität und Verkehr“ der Bundesregierung, [PTMVBW01] und [Rheinland01], einen zumindest indirekten Niederschlag finden sie in dem daraus hervorgegangenen Forschungsschwerpunkt „System Schiene 2010“, [IsenseeWurm01]. Daneben besteht gleichzeitig die hersteller– und betreiberseitige Forderung nach kürzeren Entwicklungszeiten und kürzeren Entwicklungszyklen bei möglichst geringen Entwicklungskosten. Mit einen Ausweg aus diesem Dilemma bieten die mannigfaltigen Methoden der (fahrzeug)technischen computergestützten Konstruktion und Simulation, eingesetzt von der (Weiter)Entwicklung einzelner Systemkomponenten über die Auslegung/Untersuchung der Laufdynamik eines Fahrzeuges bis hin zum virtuellen Gesamtfahrzeugentwurf. Beispielsweise kann die laufdynamische Simulation einen Großteil der zeit– und kostenaufwändigen Versuchsfahrten ersetzen. Das Ausloten des Fahrzeugverhaltens in versuchstechnisch sich verbietenden Grenzbereichen oder die Erfassung messtechnisch nur aufwändig oder gar nicht zugänglicher Messgrößen stellen weitere Vorteile des Computereinsatzes dar.

Erster Schritt einer jeglichen Fahrdynamiksimulation ist die Abstraktion des physikalischen Systems in einem mathematischen Modell, das die Dynamik des Originals in ausreichendem Maße widerspiegelt, die Generierung der Bewegungsgleichungen also, Abb. 1.1. Hierfür stehen leistungsfähige und erprobte Programmpakete kommerziell zur Verfügung, die nicht nur das automatisierte und damit sichere Aufstellen der Bewegungsgleichungen erlauben, sondern auch gleichzeitig eine große Palette angepasster und optimierter Analysemethoden anbieten. Das zeitaufwändige und fehleranfällige (und damit unter obiger Prämisse im industriellen Rahmen kaum sinnvoll anwendbare) Aufstellen der Bewegungs-

gleichungen von Hand entfällt damit. Zur Anwendung auf Rad-Schiene-Systeme muss allerdings eine entsprechende, sehr spezifische Funktionalität vorhanden sein.

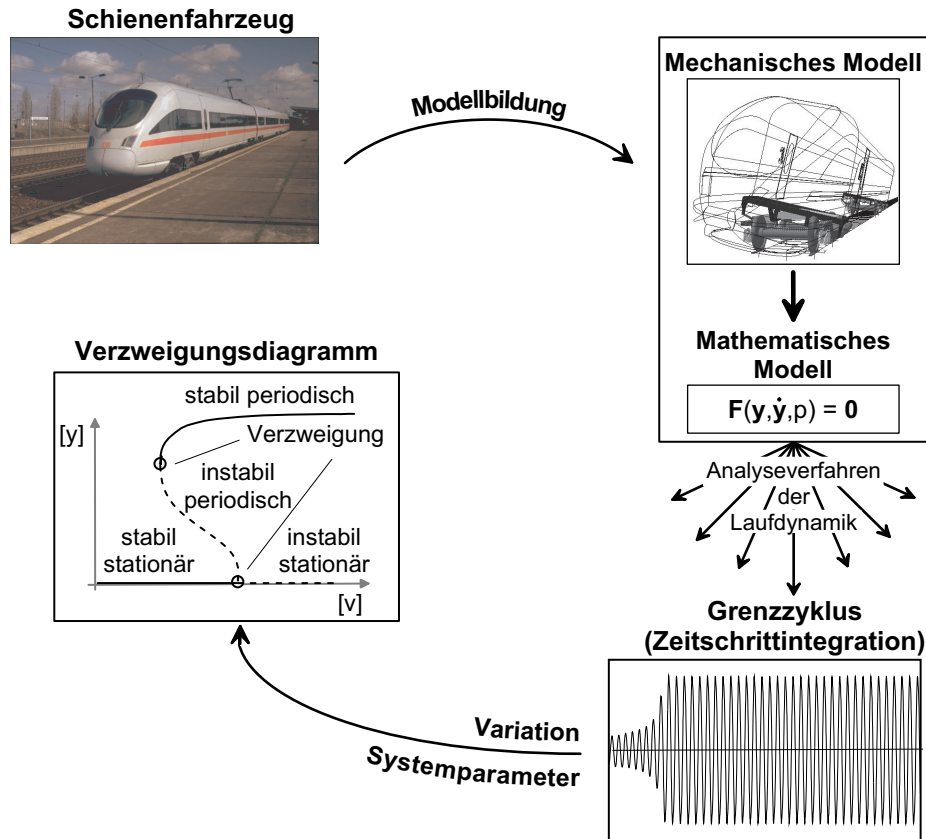


Abbildung 1.1: Verzweigungsanalyse: Vom realen System zum Verzweigungsdiagramm. (Photographie: C. Splittgerber, Internet: <http://mercurio.iet.unipi.it>).

Im Rahmen einer umfassenden Analyse der Laufdynamik eines Schienenfahrzeugs stellt die Untersuchung des Fahrzeugverhaltens im ideal geraden, störungsfreien Gleis einen sehr wichtigen Grundbaustein dar. Ziel ist die Bestimmung des Langzeitverhaltens als Reaktion auf eine (Anfangs)störung. Von besonderem Interesse ist dabei der Einfluss prägnanter Systemparameter wie der Fahrgeschwindigkeit oder der Feder-/ Dämpferkoeffizienten der Fahrzeugaufhängung. Ein typisches Szenario bei einer sukzessiven Variation der Fahrgeschwindigkeit sei im Folgenden kurz skizziert: Für moderate Geschwindigkeiten klingen sämtliche Anfangsstörungen hin zu einem *stationären Gleichgewicht* rasch ab. Mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit wächst auch die Dauer des Abklingvorgangs, ab einer bestimmten Grenzggeschwindigkeit, der *kritischen Geschwindigkeit*, ändert sich das Langzeitverhalten jedoch abrupt und es stellt sich ein gleichmäßig schwingendes, periodisches Verhalten ein, ein *Grenzzzyklus* (Schlingerlauf). Bei weiter steigender Fahrgeschwindigkeit wächst die Amplitude dieser Dauerschwingung bis zum ausgeprägten Spurkranzkontakt an und die Gefahr einer Entgleisung nimmt zu. Charakteristisch ist dabei das Vorhandensein eines Geschwindigkeitsbereichs, in dem allein abhängig von der Anfangsstörung sich so-

wohl stationäres als auch periodisch schwingendes Verhalten einstellen kann. Das geschilderte prinzipielle Verhalten ist durch entsprechende Computersimulationen dokumentiert, z.B. [Kaas-Petersen86, TrueJensen94, Slivsgaard95], und wird anhand von Messungen an skalierten Rollprüfständen in [Jaschinski90, TanifujiNagai96] sowie anhand von Messungen an realen Fahrzeugen bei Rollprüfstandsversuchen, [SchmidtMauer82], bestätigt.

Da der Betriebsbereich von Schienenfahrzeugen auf den Geschwindigkeitsbereich mit ausschließlich stationärem Fahrzeugverhalten (bei Fahrt im ideal geraden, ungestörten Gleis) beschränkt ist, stellt nach [Wickens65] die kritische Geschwindigkeit gemeinsam mit dem Fahrkomfort das wichtigste Auslegungskriterium für die Fahrt schneller Schienenfahrzeuge im geraden Gleis dar, [Hillenbrand93]. Eine Fahrt im Grenzyklus hätte nicht nur stark negative Auswirkungen auf den Fahrkomfort, sondern könnte leicht auch zu erheblichen Schädigungen von Fahrzeug und Fahrweg oder gar zur Entgleisung führen. Bei der Auslegung von Schienenfahrzeugen darf demnach aber auch der Parameterbereich des unbestimmten eingeschwungenen Endzustands mit potentiellm Auftreten von Dauerschwingungen nicht vernachlässigt werden. Aber auch das Schwingungsverhalten des Gesamtfahrzeuges sowie einzelner Subsysteme bei ungeeigneten Systemparametern (z.B. sehr hohen Geschwindigkeiten), das Verhalten unter extremen Randbedingungen also, erlaubt dem Ingenieur wichtige Rückschlüsse auf die Qualität der Auslegung der Laufdynamik.

Das beschriebene Fahrzeugverhalten lässt sich sehr gut mit dem systemdynamischen Hilfsmittel des *Verzweigungsdiagramms* („bifurcation diagram“) darstellen. Aufbauend auf den Bewegungsgleichungen des dynamischen Systems gibt ein solches Diagramm als Ergebnis der in Abb. 1.1 skizzierten *Verzweigungsanalyse* dessen ungestörtes Langzeitverhalten – einen *Attraktor* oder mehrere koexistierende Attraktoren – in Abhängigkeit von einem Systemparameter wieder. Von besonderer Bedeutung sind ausgezeichnete Punkte, die *Verzweigungspunkte*, an denen sich das Systemverhalten schlagartig bedeutend verändert. Neben der Lokalisierung solcher Verzweigungspunkte bezüglich des variierten Systemparameters erlaubt eine Verzweigungsanalyse meist auch, den sich einstellenden Systemzustand als stabil oder instabil zu beurteilen. Zur rechnergestützten Verzweigungsanalyse stehen Algorithmen zur Verfügung, die eine direkte Bestimmung der gesuchten Attraktoren unter Vermeidung sämtlicher Übergangsvorgänge („Direkte Methoden“) in Kombination mit einer diskreten *Verfolgung/Fortsetzung* eindimensionaler Raumkurven („continuation methods“, „path-following“) in höher-dimensionalen Räumen erlauben.

Die rechnergestützte, ingenieurmäßige, weitgehend automatisierte Verzweigungsanalyse der Bewegungsgleichungen von detaillierten, wirklichkeitsnahen Simulationsmodellen aus dem Schienenfahrzeugbereich – stellvertretend für technisch-dynamische Systeme aus industriellen Problemstellungen – ist das Thema dieser Arbeit. Die Anwendung von Verzweigungssoftware auf die damit einhergehenden großen Differentialgleichungssysteme oder gar auf eine differentiell-algebraische Formulierung der Bewegungsgleichungen ist bisher noch nicht sehr weit gediehen.

1.2 Literatur und Stand der Technik

Fragen zur Stabilität der Bewegung von Fahrzeugen werden schon seit langem betrachtet; ein Überblick über die Geschichte dieses Teilbereichs der Fahrzeugsystemdynamik wird in [KnotheBöhm99] gegeben. Die wichtigsten Methoden zur Modellbildung und zur Analyse

sowohl der linearen als auch der nichtlinearen Systemdynamik von Fahrzeugen sind in [KortümLugner94, PoppSchiehlen93] zusammengefasst, speziell im Hinblick auf eine Anwendung auf Schienenfahrzeuge zeigt [True99] die Vielzahl der möglichen nichtlinearen Phänomene auf.

Das Prinzip der Verzweigungsanalyse wird bereits seit einigen Jahren auf Simulationsmodelle von Rad-Schiene-Systemen angewendet. Im Vordergrund steht dabei häufig die Berechnung des Grenzyklusverhaltens in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit, die kritische Geschwindigkeit sowie die Lokalisierung des Geschwindigkeitsbereichs mit potentiell unterschiedlichem Langzeitverhalten. Gemein ist den meisten dieser Arbeiten die Beschränkung des Simulationsmodells auf einen einzelnen Radsatz oder ein Drehgestell mit zwei Radsätzen sowie die lineare Approximation der stark nichtlinearen Kontaktgeometrie der Schnittstelle zwischen Rad und Schiene. Diese Beschränkungen manifestieren sich auch in dem am ausgiebigsten untersuchten Simulationsmodell eines Personenwagendrehgestells, vorgeschlagen erstmalig in [Cooperrider72] und modifiziert in [Kaas-Petersen86]. Die mannigfaltigen Untersuchungen gehen dabei auch über das periodische Verhalten hinaus, festgestellt wird des Weiteren quasi-periodisches und chaotisches Verhalten [Kaas-Petersen86, True92, JensenTrue97, IsaksenTrue97]. Selbiges Modell wird auch in [GalvanettoBriseghellaBishop97, Hassard00] bearbeitet. Abgesehen von letztgenannter Arbeit werden dabei stationäre und periodische Attraktoren mit dem in [Kaas-Petersen86] entwickelten Programm PATH direkt bestimmt und im Zustands-Parameter-Raum fortgesetzt. Periodische Attraktoren folgen damit durch Anwendung eines Schießverfahrens, quasi-periodische und chaotische Attraktoren ergeben sich aus einer einfachen Parametervariation über eine numerische Integration. Vergleichbare Vorgehensweisen werden in [KnudsenFeldbergJaschinski91, Meijaard91, XuSteindlTroger92] verfolgt. In [TrueJensen94] ist die lineare Approximation der Rad-Schiene-Geometrie zugunsten einer realitätsnahen nichtlinearen Profilierung aufgegeben. Eine Sonderstellung nehmen [Jaschinski90, TanifujiNagai96] ein. Dort wird das errechnete Grenzyklusverhalten mit Messungen aus Versuchen auf einem skalierten Rollprüfstand verglichen.

Verzweigungsanalysen der Simulationsmodelle vollständiger Fahrzeuge werden in [Slivsgaard95] für einen Reisezugwagen und in [Stichel01] für einen Güterwagen vorgestellt. Beide Arbeiten berücksichtigen reale nichtlineare Profilierungen von Rädern und Schienen. Allerdings wird der Einsatz direkter Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Grenzyklen sowie von Fortsetzungsalgorithmen zugunsten einer Parametervariation über Zeitschrittintegrationen vermieden.

Finite-Differenzen-Methoden führen zwar auf sehr große nichtlineare Gleichungssysteme, erfordern jedoch keine numerische Integration. Damit gelingt [Franke98] die direkte Bestimmung periodischer Lösungen der Bewegungsgleichungen eines einzelnen Radsatzes; die Kombination mit einem geeigneten Fortsetzungsalgorithmus ermöglicht dann eine vollständig automatisiert ablaufende Verzweigungsanalyse.

Ein spezielles Frequenzbereichsverfahren kommt in [Hauschild81, AhmadianYang98] zur direkten Bestimmung von Grenzyklen zur Anwendung: Die Harmonische Balance in Form eines Fourier-Ansatzes 1. Ordnung als eine Methode der Quasilinearisierung. Erstgenannter entwickelt ein quasilineares Rad-Schiene-Element zum Einsatz in einem allge-

meinen Simulationsprogramm, [AhmadianYang98] erzeugen das Verzweigungsdiagramm eines einzelnen gefesselten Radsatzes mit kegel-profilierten Rädern. Die auf kleine Amplituden beschränkte Gültigkeit dieser Methode wird in [GaschMoelleKnothe84] durch einen Fourier-Ansatz höherer Ordnung aufgehoben.

Die Grundlagen zu Theorie und Numerik der Verzweigungsanalyse wie auch zu anderen Methoden der *nichtlinearen Systemdynamik* sind umfassend beispielsweise in den Monographien [GuckenheimerHolmes96, Seydel94, NayfehBalachandran95] dargestellt; eine Konzentration auf die Methoden der numerischen Pfadverfolgung findet in [AllgowerGeorg03] statt. Eine Möglichkeit zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen liegt in der Formulierung als Randwertproblem. Deren Numerik und Lösung wird ausführlich in [AscherMattheijRussell95] behandelt.

Zur numerischen Verzweigungsanalyse auf dem Fundament einer automatisierten direkten Bestimmung und Verfolgung stationärer und periodischer Lösungen der beschreibenden Gleichungen allgemeiner dynamischer nichtlinearer Systeme (häufig auch unter dem Begriff der Pfadverfolgung zusammengefasst) steht eine Reihe von Programmsystemen zur Verfügung. Wichtigstes Unterscheidungsmerkmal sind dabei die jeweiligen Algorithmen zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen (Grenzzyklen). Der Grad der Aufbereitung dieser Programme reicht vom reinen Forschungscode bis hin zum anwenderfreundlichen Softwaresystem mit integrierter Ergebnisdarstellung. Eine Verfolgung quasi-periodischer oder chaotischer Attraktoren ist damit allerdings nicht möglich, entsprechende Algorithmen, basierend allerdings auf dem indirekten Ansatz einer Zeitintegration in Kombination mit einer einfachen Parametervariation, werden in [ParkerChua89] vorgestellt.

Zur Verzweigungsanalyse rein algebraischer Systeme sowie von Systemen sowohl gewöhnlicher als auch partieller Differentialgleichungen geeignet ist das Programm AUTO, [DoedelKellerKernez91, Doedel *et al.* 97]. Es erlaubt die direkte Bestimmung und Fortsetzung stationärer und periodischer Lösungen in Kombination mit der möglichen Beurteilung deren Stabilität sowie die Lokalisierung von Verzweigungspunkten. Periodische Lösungen werden direkt mit einem Finite-Differenzen-Verfahren bestimmt. Einen ähnlichen Leistungsumfang bietet BIFPACK, [Seydel94, Seydel99], die Bestimmung periodischer Lösungen erfolgt dabei mit Hilfe eines Mehrfachschießverfahrens, also auf der Grundlage einer geschickten Kombination von Zeitintegrationen. Ein Einfachschießverfahren als vereinfachte Variante kommt in dem eher den Forschungscode zuzurechnendem PATH zum Einsatz, [Kaas-Petersen86, Kaas-Petersen89]. Ebenfalls auf einem Einfachschießverfahren bauen DERPER, [HolodniokKubicek84], und PDECONT, [LustRooseSpenceChampneys98, LustRoose98], auf. Letzteres ist speziell für die Anwendung auf große Gleichungssysteme entwickelt, die im Falle partieller Differentialgleichungen anfallen. Als weitere Verzweigungsprogramme mit einer vergleichbaren Palette von Anwendungsgebieten und -möglichkeiten wären noch CANDYS/QA ([Jansen95]) und CONTENT ([KuznetsovLevitin97]) zu nennen. Die Internet-Seite [Osinga97] fasst Informationen bezüglich unterschiedlicher Software zur Untersuchung dynamischer Systeme zusammen, wobei ein Schwerpunkt von Programmen zur Verzweigungsanalyse gebildet wird. Ein vollständiger Verzweigungsalgorithmus ist auch in [Meijaard91] beschrieben.

Gemeinsames Merkmal all dieser Programmentwicklungen ist die Beschränkung auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wenn auch die numerische Lösung von Anfangswertproblemen differentiell–algebraischer Gleichungssysteme seit den 80–er Jahren des vergangenen Jahrhunderts sich einer außerordentlichen Beachtung erfreute, [BrenanCampbellPetzold96, DeuffhardBornemann94, Eich-SoellnerFührer98], in deren Folge eine Reihe unterschiedlicher, problemangepasster Gleichungslöser entstand, gilt dies weder für entsprechende Randwertprobleme (zur direkten Berechnung periodischer Lösungen) noch für Verfolgungs– bzw. Verzweigungsalgorithmen. Eine der wenigen Ausnahmen ist in der Dissertation [Franke98] gegeben. Dort wird ein vollständiges Verzweigungsprogramm für differentiell–algebraische Gleichungssysteme entwickelt und u.a. auf die Bewegungsgleichungen eines einzelnen Radsatzes angewendet. Eine weitere Ausnahme ist in dem Programm COLDAE zu sehen, [AscherSpiteri94], einem Lösungsalgorithmus für allgemeine Randwertprobleme, gegeben in differentiell–algebraischer Formulierung.

Zur Anwendung eines jeden der genannten Programmsysteme sind die Bewegungsgleichungen vom Anwender in Form von Softwaremodulen bereitzustellen – eine sehr zeitaufwändige Aufgabe, deren Komplexität mit der erforderlichen Größe bzw. Detailtreue des Simulationsmodells stark zunimmt. Da sich dieses Problem aber bei jeglicher Simulation oder Berechnung der Fahrdynamik von Fahrzeugen (und nicht nur da) ergibt, sind bereits seit mehreren Jahren Programmpakete im Einsatz, die eine automatisierte Generierung der Bewegungsgleichungen erlauben. Diese Programme bauen im Allgemeinen auf einer Abstraktion des Fahrzeugsystems als mechanisches Mehrkörpersystem auf, im Falle von Schienenfahrzeugen ist eine zusätzliche, sehr spezifische Funktionalität zur Abbildung des hochgradig komplexen und nichtlinearen Kontaktes zwischen Rad und Schiene unabdingbare Voraussetzung. Eine Übersicht über allgemeine Mehrkörperprogramme ist in [Schiehlen90] zusammengestellt, in [KortümSharp93] findet eine Beschränkung der Anwendbarkeit auf allgemeine Fahrzeugsysteme statt und in [Iwnicki99] werden ausschließlich Programme mit Rad–Schiene–Funktionalität berücksichtigt.

1.3 Zielsetzung und Aufbau

Ziel dieser Arbeit ist eine Softwareumgebung, die eine weitgehend automatisierte numerische Verzweigungsanalyse von Schienenfahrzeugen mittels der Methode der Pfadverfolgung ermöglicht, und zwar auf der Basis detaillierter, realistischer und damit zwangsläufig komplexer mathematischer Modellierungen. Die für diese Art von Verzweigungsanalyse bisher typischerweise angewandte weitgehende Abstraktion und Reduktion solch großer technischer Systeme hin zu Bewegungsgleichungen in der Form von Differentialgleichungssystemen möglichst kleiner Dimension soll vermieden werden. Weiter soll eine voll nichtlineare Kontaktgeometrie und –mechanik in der Schnittstelle zwischen Rad und Schiene sowie die Formulierung der Bewegungsgleichungen als System differentiell–algebraischer Gleichungen Berücksichtigung finden. Die oben angeführten Arbeiten betreffen immer nur Teilaspekte eines solch ganzheitlichen Ansatzes. Allerdings werden die Untersuchungen auf den technisch–industriell relevanten Bereich des stationären und des periodischen Bewegungsverhaltens beschränkt.

Grundidee ist die Verkopplung eines auch für Schienenfahrzeuge anwendbaren Programmpaketes zur computergestützten Generierung und Analyse der Bewegungsgleichungen technisch-mechanischer Systeme (gewählt: SIMPACK, [Rulka98, Netter98]) mit einem Programmpaket zur Verzweigungsanalyse allgemeiner dynamischer Systeme (gewählt: PATH, [Kaas-Petersen86]). Auch wenn die Arbeit stark an der speziellen Problemstellung von Schienenfahrzeugen orientiert ist, soll die Anwendung auf entsprechend geeignete, allgemeine technische Systeme nicht außer Acht gelassen werden.

Kapitel 2 gibt einen kurzen Abriss der Modellierung technisch-mechanischer Systeme als Mehrkörpersystem und beschreibt die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen unter Betonung der besonderen Gegebenheiten bei Anwendung auf Schienenfahrzeuge. Im zweiten Teil des Kapitels sind dann die üblicherweise zur Untersuchung der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen eingesetzten Berechnungsverfahren zusammengefasst.

Das daran anschließende Kapitel 3 befasst sich mit der Theorie und der numerischen Berechnung von Verzweigungsdiagrammen als einer Disziplin der nichtlinearen Systemanalyse. Die wichtigsten Lösungsansätze zur Bearbeitung der Teilaufgaben einer computergestützten Verzweigungsanalyse werden gemeinsam mit den speziellen Lösungsalgorithmen des von KAAS-PETERSEN entwickelten und im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Programmpaketes PATH vorgestellt. Zum Abschluss des Kapitels wird die Verzweigungsanalyse den im vorangehenden Kapitel aufgeführten Berechnungsverfahren zur Laufdynamikanalyse von Schienenfahrzeugen gegenübergestellt und gegen diese abgegrenzt.

Innerhalb einer Verzweigungsanalyse gestaltet sich die direkte Berechnung periodischer Lösungen unter algorithmischen Gesichtspunkten als die bei weitem schwierigste und aufwändigste Teilaufgabe. Zu Beginn des Kapitels 4 werden unterschiedliche Lösungsansätze kurz skizziert und darauf aufbauende Implementierungen zusammenfassend erörtert. Vorstellung und Kritik der in PATH bisher realisierten Methode der Poincaré-Abbildung führt dann über auf den Hauptteil des Kapitels, der algorithmischen Erweiterung dieser Methode durch Verwendung der Variationsdifferential- oder Sensitivitätsgleichungen.

Die Erweiterung der in PATH implementierten (alten und neuen) Algorithmen auf die umfassendere Klasse der differentiell-algebraischen Gleichungssysteme ist Inhalt von Kapitel 5. Deren wesentliche Besonderheiten werden zu Beginn des Kapitels zum besseren Verständnis der anschließenden Herleitungen zusammengefasst. Der interne Übergang auf eine Zustandsform, einem äquivalenten System gewöhnlicher Differentialgleichungen, bildet den zentralen Gedanken der erarbeiteten Methodik. Die Auswahl einer geeigneten Zustandsform, der Nachweis deren Anwendbarkeit sowie die erforderlichen Erweiterungen stellen den Kern des Kapitels dar.

Kapitel 6 ist im ersten Teil programmiertechnischen Aspekten gewidmet, insbesondere der Integration der entwickelten Algorithmen gemeinsam mit PATH und dem Simulationsprogramm SIMPACK der Firma INTEC GmbH in einem modularen Gesamtkonzept zur Verzweigungsanalyse technisch-mechanischer Systeme. Im zweiten Teil werden dann erste Testrechnungen mit kleineren Simulationsmodellen vorgestellt. Hintergrund ist die partielle Verifikation der Algorithmen und deren Umsetzung in Programmcode durch Vergleich mit analytisch abgeleiteten Ergebnissen sowie mit entsprechenden Untersuchungen aus der Literatur.

In Kapitel 7 wird dann die entwickelte Softwareumgebung zur Verzweigungs- und Stabilitätsanalyse eines vollständigen Reisezugwagens herangezogen. Das zugrunde liegende Simulationsmodell eignet sich dabei durchaus auch zur Auslegung/Untersuchung der Laufdynamik des Fahrzeuges mittels der gebräuchlichen Berechnungsverfahren.

Das Kapitel 8 fasst die Arbeit unter Betonung der neu entwickelten Beiträge abschließend zusammen und zeigt mögliche Richtungen zukünftiger Arbeiten zur Verzweigungsanalyse von Schienenfahrzeugmodellen auf.

Kapitel 2

Simulation der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen

Die rechnerische Simulation beliebiger dynamischer Systeme lässt sich in die Modellbildung sowie die anschließende Modellanalyse unterteilen. Ziel der Modellbildung ist es, durch Anwendung geeigneter Gesetze oder Gesetzmäßigkeiten in ihrer mathematischen Formulierung einen Satz von Gleichungen zur Verfügung zu stellen, der das dynamische Verhalten des zu untersuchenden Systems mit ausreichender Genauigkeit beschreibt. Im Rahmen der Modellanalyse werden dann diese Gleichungen im Hinblick auf unterschiedliche Fragestellungen mit Hilfe geeigneter mathematischer Verfahren untersucht. Eine ausreichend wirklichkeitsnahe Abbildung technisch relevanter Systeme ergibt dabei meist komplexe und große mathematische Modelle, deren intensive Analyse den Einsatz entsprechend leistungstarker Computer erfordert. In stetig zunehmendem Maße verläuft aber auch die Modellbildung selbst rechnergestützt; neben einer sehr deutlichen Steigerung der Effizienz entfällt damit das fehleranfällige Aufstellen des beschreibenden Gleichungssystems von Hand.

Die Modellbildung von Schienenfahrzeugen stützt sich auf der Grundlage einer Betrachtung als technisch-mechanisches System im Wesentlichen auf zwei unterschiedliche Ansätze: Steht die elastische Verformung oder Beanspruchung (und daraus abgeleiteter Größen) einzelner Bauteile oder Bauteilgruppen im Vordergrund, kommt die Modellierung als Finite-Elemente-System (FES) zur Anwendung. Mehrkörpersysteme (MKS) erlauben dagegen die effiziente Beurteilung/Bewertung der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Bauteilen und Bauteilgruppen oder des komplexen Verhaltens des Gesamtsystems, siehe hierzu beispielsweise [Schiehlen86] oder [Bremer88]¹. Neben diesen „reinen“ Ansätzen kann aber auch ein *hybrider* Ansatz erforderlich sein. Hierzu wird das Gesamtfahrzeugsystem in Subsysteme aufgeteilt, jedes Subsystem wird dann den jeweiligen Anforderung entsprechend als FES oder als MKS modelliert. Bei der Analyse des Gesamtsystems muss dann natürlich den daraus entstehenden Wechselwirkungen zwischen FES und MKS Rechnung getragen werden, [SchwertassekWallrapp99].

¹Der Vollständigkeit halber sei noch angefügt, dass die Methode der Kontinuierlichen Systeme einen dritten Ansatz darstellt. Ein typischer Einsatzbereich dieser Methode wäre z.B. die Untersuchung von Balkenbiegungen, wie sie u.a. zur vereinfachten Modellierung von Brückenstrukturen zum Einsatz kommt.

Die Simulation der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen ist heutzutage ohne Computerunterstützung gar nicht mehr denkbar. Es stehen umfassende, bewährte und in weiten Bereichen verifizierte Programmsysteme kommerziell zur Verfügung. Diese erlauben neben der Modellbildung selbst auch eine an die jeweilige Modellierung angepasste umfassende Modellanalyse.

Der erste Teil dieses Kapitels befasst sich mit Programmsystemen, die zur Dynamikanalyse von Maschinen und Fahrzeugen eingesetzt werden. Die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen werden im Anschluss daran im Hinblick auf eine möglichst effiziente und umfassende Modellanalyse vorgestellt und kurz diskutiert. Das darauf folgende Gesamtkonzept der Modellbildung von Schienenfahrzeugen baut zwar auf einer Abbildung als allgemeines hybrides Mehrkörpersystem auf, der Schwerpunkt liegt aber auf den spezifischen Gegebenheiten von Rad–Schiene–Systemen und deren simulatorischer Umsetzung. Eine kurze Abhandlung zur Modellierung des Kontakts zwischen Rad und Schiene rundet diesen Teil ab. Im zweiten Abschnitt werden dann die wesentlichen technisch–industriell relevanten Berechnungsverfahren zur Analyse der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen aufgezeigt. Die Einordnung und Abgrenzung des in dieser Arbeit betrachteten Verfahrens der Pfadverfolgung zur Verzweigungsanalyse bezüglich der dabei beschriebenen herkömmlichen Analysemethoden erfolgt als Abschluss des Kapitels 3.

2.1 Vom Rad–Schiene–System zum mathematischen Modell

Die Entwicklung zukünftiger Fahrzeugkonzepte wie auch Untersuchung und Beurteilung der Laufdynamik bestehender Schienenfahrzeuge im industriellen Rahmen erfordern die effiziente und sichere Modellierung und anschließende Simulation umfassender Rad–Schiene–Systeme. Hierzu ist nach [PoppSchiehlen93] im Frequenzbereich bis etwa 50 Hz in der Methode der Mehrkörpersysteme der brauchbarste Ansatz zu sehen. Die Berücksichtigung weitgehend beliebiger äußerer Bedingungen und Fahrmanöver ist dabei eine unabdingbare Voraussetzung. Die Komplexität des Modells folgt stets aus den Anforderungen der Simulationssaufgabe nach dem Grundsatz „Die Qualität der erreichbaren Aussagen über das Systemverhalten ist nur so gut wie das zugrunde liegende Modell“ (aus [PoppSchiehlen93]).

2.1.1 Software zur Dynamiksimulation von Schienenfahrzeugen

Unter konstruktiven Gesichtspunkten stehen Neuentwicklungen im Bereich des Schienenfahrzeugbaus zunehmend im Zeichen einer Abkehr von konventionellen Lösungen, manifestiert im Konzept des starren Radsatzes als Basiselement eines Schienenfahrzeuges. Beispiele für zum Teil bereits angewandte Ansätze sind die Einzelradaufhängung mit regeltem Einzelradantrieb, schlupfgeregelte oder angelenkte Radsätze, Neigetechnik, aktive/semiaktive Fahrzeugaufhängungen sowie der Grundsatz des Leichtbaus. Auslegung und Beurteilung solch komplexer Rad–Schiene–Systeme erfordern den Einsatz von Computern

und der entsprechenden Software. Ausgehend von einem MKS-Ansatz erlauben diese Programme die sichere Erstellung der Bewegungsgleichungen des betreffenden mechanischen Systems, die Modellbildung also. Zur Untersuchung des mathematischen Modells wird eine große Zahl unterschiedlichster problemangepasster Analysemethoden zur Verfügung gestellt, die im Hinblick auf die jeweils zu bearbeitende Gleichungsstruktur optimiert sind.

Prinzipiell lassen sich zwei unterschiedliche Konzeptionen dieser Programmsysteme bezüglich der Modellgenerierung unterscheiden. Zum einen gibt es reine Rad-Schiene Programme mit fest programmierten Bewegungsgleichungen, beschreibend einen zwar möglichst umfassenden aber doch fest bestimmten Fahrzeugtyp. Zur Simulation von Reisezugwagen könnte eine solche generische Modellgrundstruktur aus einem Wagenkasten, 2 Drehgestellen und 4 Radsätzen bestehen, die über entsprechende Verbindungselemente wechselwirken können. Die Anpassung an das zu simulierende Fahrzeug erfolgt dann über frei definierbare Parameter, z.B. Abmessungen, Massengeometrie und Koeffizienten der Aufhängungen. Den Vorteilen der einfacheren Handhabung und einer in Spezialfällen höheren Recheneffizienz dieser Konzeption steht deren offensichtlicher und bedeutender Nachteil gegenüber: Die Modellierung nicht vorgesehener Fahrzeugtypen erfordert einen erheblichen Vorabaufwand zur Aufstellung und Programmierung der Bewegungsgleichungen. Bekannte Vertreter dieser Konzeption sind u.a. VAMPIRE, NUCARS und VOCO.

Einem anderen Grundgedanken folgen allgemeine MKS-Programme, die aus entsprechenden Anwendereingaben die Bewegungsgleichungen selbstständig in symbolischer oder numerischer Form erstellen. Sind spezielle Bausteine zur Modellierung der Besonderheiten von Schienenfahrzeugen vorhanden, können Programme dieser Art direkt zur Simulation unterschiedlichster Fahrzeugkonzepte eingesetzt werden; verbreitete Vertreter sind u.a. MEDYNA, ADAMS und SIMPACK. Eine umfassende Übersicht über Rechenprogramme zur Simulation der Dynamik von Fahrzeugen ist in [KortümSharp93] zu finden, eine Einschränkung auf Schienenfahrzeuge liegt [Iwnicki99] zugrunde. In beiden Büchern werden neben einer vergleichenden Vorstellung gängiger Computercodes auch die Ergebnisse umfangreicher Benchmark-Tests vorgestellt.

Den genannten Simulationsprogrammen gemein ist der grundlegende MKS-Ansatz. Im weiteren soll kurz die generelle Struktur solcher Programme zur Simulation beliebiger Rad-Schiene-Systeme beispielhaft skizziert werden. Ausgangspunkt sei also die freiere Konzeption eines allgemeinen MKS-Programmes mit Rad-Schiene-Funktionalität.

Grundlage jeden MKS-Programms ist die Abstraktion des zu untersuchenden dynamischen Systems hin zu einem mechanischen Ersatzmodell in der Form eines (hybriden) Mehrkörpersystems, dargestellt in Abb. 2.1. Ein solches Mehrkörpersystem besteht aus starren und elastischen Körpern, die über masselose Verbindungselemente untereinander und mit dem Inertialsystem wechselwirken können. Kraftelemente erzeugen eingeprägte Kräfte und Momente in den Anlenkpunkten, typische Beispiele sind Federn und Dämpfer, einzeln, parallel oder in Reihe geschaltet und Aktuatoren. Gelenke hingegen schränken die Bewegungsmöglichkeiten zwischen den Koppelpunkten – und damit auch zwischen den Körpern – durch Zwangs- oder Reaktionskräfte ein.

Die prinzipielle Struktur von MKS-Programmen wird anhand von SIMPACK umrissen; die Ausführungen folgen dabei weitgehend [Rulka98], worauf auch für weitergehende Infor-

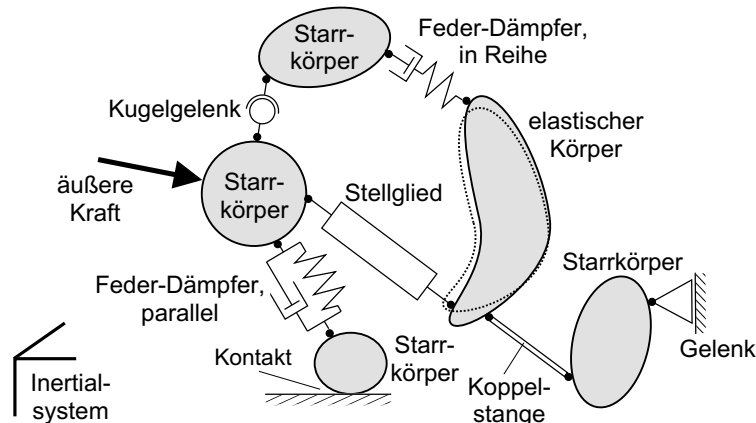


Abbildung 2.1: Prinzipieller Aufbau eines hybriden Mehrkörpersystems bestehend aus starren und elastischen Körpern und Verbindungselementen.

mationen verwiesen sei. Grundlagen zur Theorie der Mehrkörpersysteme im Allgemeinen können beispielsweise [Schiehlen86] entnommen werden, speziell im Hinblick auf die Fahrzeugdynamik aber auch [KortümLugner94] oder [PoppSchiehlen93]. Hybride MKS bestehend aus starren und elastischen Körpern werden in [SchwertassekWallrapp99] ausführlich behandelt, in [Eich-SoellnerFührer98] hingegen liegt der Schwerpunkt auf der numerischen Analyse der unterschiedlichen Formulierungen der Bewegungsgleichungen von MKS.

Der erste Schritt jeder Simulation mechanischer Systeme besteht also im Aufbau eines für die Simulationaufgabe geeigneten mechanischen Ersatzmodells, siehe Abb. 2.2. Hierzu wird dem Anwender im Rahmen einer MKS-Bibliothek eine große Zahl unterschiedlichster vordefinierter Standardelemente wie Schubgelenke, Kardangelenke aber auch Feder-Dämpfer-Elemente usw. zur Verfügung gestellt. Gleichzeitig mit dem mechanischen Modell kann auch ein graphisches Modell zur verbesserten Übersichtlichkeit in der Modell-erstellungsphase wie auch zur Animation der Bewegungen des fertigen Modells erzeugt werden. Im Verlauf dieses *Pre-Processings* wird neben einer Vielzahl weiterer Definitionen und Tätigkeiten beispielsweise auch die eventuell notwendige Trassierung festgelegt oder es können die bereits vordefinierten Profile von Rädern und Schienen zugewiesen sowie die daraus resultierenden Kontaktgeometrien visualisiert und überprüft werden.

Ausgehend von diesem mechanischen Ersatzmodell erzeugt der MKS-Formalismus auf der Grundlage mechanischer Gesetze und Prinzipien die Bewegungsgleichungen des Systems – das mathematische Modell also – als System gewöhnlicher Differentialgleichungen oder als differentiell-algebraisches Gleichungssystem zweiter Ordnung in den unbekannten Lage- \mathbf{p} , Geschwindigkeits- $\dot{\mathbf{p}}$ und Beschleunigungs koordinaten $\ddot{\mathbf{p}}$.

Die Bewegungsgleichungen, in numerischer und/oder symbolischer Formulierung, können dann mit unterschiedlichen Berechnungsverfahren untersucht und analysiert werden. Exemplarisch seien hier die Statische Analyse zur Bestimmung der Gleichgewichtslage sowie die Dynamische Analyse, d.h. die Zeitschrittintegration genannt. Aufbauend auf diesen Analysemethoden führt die Parametervariation dann auf automatisierte Berechnungen zur umfassenden und integrierten Systemanalyse. Die oberste Analysestufe kann unter dem

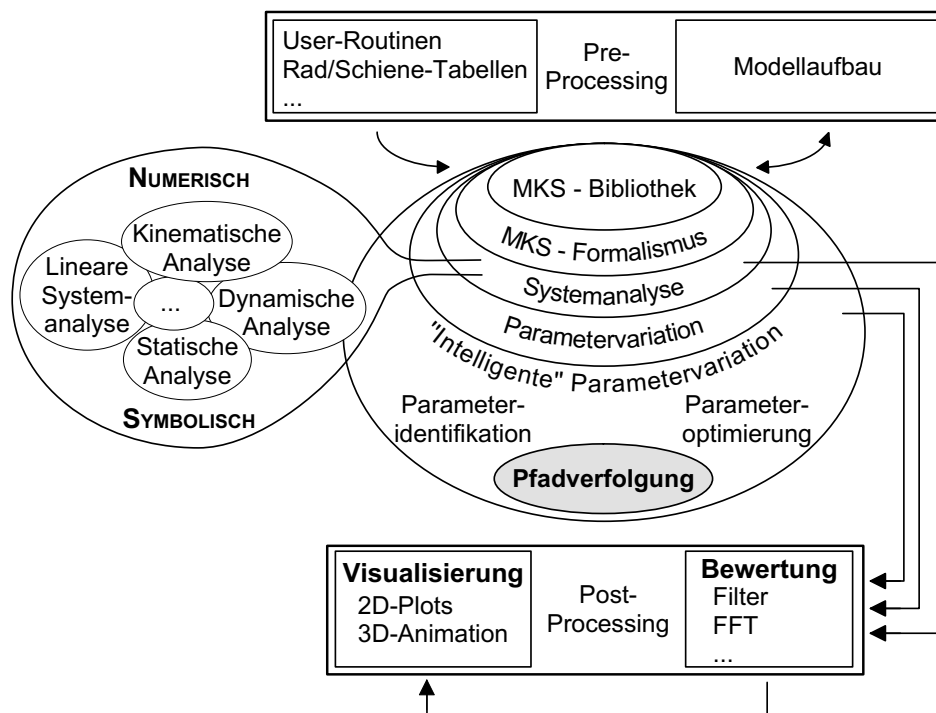


Abbildung 2.2: Prinzipiskizze eines MKS-Programmes zur Simulation mechanischer Systeme.

Begriff der „intelligenten“ oder algorithmus-gesteuerten Parametervariation zusammengefasst werden. Verfahren sind die Parameteroptimierung und -identifikation; an dieser Stelle ist auch das Thema dieser Arbeit, die Methoden der *Pfadverfolgung* zur Verzweigungsanalyse, einzureihen.

Nach einer eventuellen Aufbereitung der Simulationsergebnisse mit Hilfe geeigneter Datenfilter (Datenreduktion) im Rahmen des *Post-Processing* erfolgt die Ergebnisdarstellung zum einen in zweidimensionalen Plots. Die dreidimensionale Animation erlaubt hingegen die umfassende Visualisierung des Bewegungsverhaltens des Gesamtsystems oder aber ausgewählter Teilsysteme.

2.1.2 Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen

In Bezug auf die Topologie sind MKS in reiner kinematischer Baumstruktur von MKS mit kinematisch geschlossenen Schleifen zu unterscheiden, [Schiehlen86, Bestle94, Rulka98]. Werden erstere mit Hilfe von insgesamt 6 kartesischen Koordinaten je Körper (3 Translations- und 3 Winkelkoordinaten) beschrieben, ergeben sich die Bewegungsgleichungen zwar in sehr einfacher Form, jedoch müssen die durch die Gelenke erzeugten Bewegungseinschränkungen über algebraische, im Allgemeinen implizite Zwangsbedingungen der Form $\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, t)$ (im Fall holonomer Bindungen) abgebildet werden. Bei Verwendung von verallgemeinerten oder *Minimalkoordinaten* hingegen entspricht die Anzahl der Lagekoordinaten exakt der Anzahl an (Lage-) Freiheitsgraden des MKS,

$n_p = n_f$, die Reaktionskräfte aus den Bindungen treten nach Anwendung beispielsweise des d'Alembertschen Prinzips nicht mehr explizit in den Bewegungsgleichungen auf. Nach der üblichen Transformation durch Einführung verallgemeinerter Geschwindigkeiten $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{p}}$ und des Zustandsvektors $\mathbf{y} := (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$ ergeben sich die Bewegungsgleichungen als System gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDGL-System) erster Ordnung,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) . \quad (2.1)$$

Dabei sind im $(n_y \times 1)$ -Kraftvektor $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ sämtliche verallgemeinerten Kreiselkräfte sowie alle eingprägten Kräfte und Momente zusammengefasst. Eine solche Beschreibung in Minimalkoordinaten wird auch als *Zustands-* oder *Minimalform* bezeichnet, [Führer88, Bestle94].

Kinematisch geschlossene Schleifen schränken die Bewegungsfreiheit eines MKS durch zusätzliche kinematische Zwänge ein. Werden diese Zwänge durch Bindungsgleichungen, d.h. durch zusätzliche implizite algebraische Nebenbedingungen der Form $\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, t)$ berücksichtigt, folgen die Bewegungsgleichungen nach Anwendung des *d'Alembertschen Prinzips* als *Lagrangesche Gleichungen erster Art* nach [Schiehlen86] als differentiell-algebraisches Gleichungssystem (DAGL-System)

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}, t) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}, t) \boldsymbol{\lambda} \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, t) , \quad (2.2c)$$

das auch als *Deskriptorform* bezeichnet wird, [Führer88, BrennanCampbellPetzold96]. Die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{p}, t)$ ist im Normalfall positiv definit. Die jeweils n_p Koordinaten des Lagevektors \mathbf{p} und des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} legen den Bewegungszustand des Systems eindeutig fest, allerdings wird die Bewegung durch n_λ algebraische holonome Zwangsbedingungen (2.2c) eingeschränkt, die Zahl der (Lage-)Freiheitsgrade des MKS verringert sich auf $n_f = n_p - n_\lambda$. Die Zwangsmatrix $\mathbf{G}(\mathbf{p}, t) := \partial \mathbf{g}(\mathbf{p}, t) / \partial \mathbf{p}$ habe Vollrang, $\text{Rg}(\mathbf{G}) = n_\lambda$, eine redundante Beschreibung der Bindungen sei also ausgeschlossen. Gemeinsam mit den generalisierten Zwangskräften, dargestellt in der Form von Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$, garantiert diese dann die Erfüllung des kinematischen Zwangs. Im Falle reibungsbehafteter Systeme hängen die eingprägten Reibkräfte als Bestandteil des verallgemeinerten Kraftvektors im Allgemeinen nichtlinear von den Zwangskräften $-\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}$ ab, $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, t)$. Neben den Zwangsbedingungen auf Lageebene (2.2c) gelangen auch noch deren erste und zweite zeitliche Ableitungen, die Zwangsbedingungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene zur Anwendung.

An die Bewegungsgleichungen (2.2) lassen sich bei Bedarf weitere Gleichungen anknüpfen: Zusätzliche Differentialgleichungen, z.B. zur Beschreibung von Kraftelementen mit Eigendynamik (wie Feder-Dämpfer in Reihe), sowie zusätzliche algebraische Gleichungen, z.B. zur Bestimmung der Kontaktpunktlage bei Kontaktproblemen. Die Einführung eines erweiterten Zustandsvektors $\mathbf{y} := (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$ ermöglicht eine allgemeine implizite Darstellung beider Formulierungen (2.1) und (2.2) der Bewegungsgleichungen,

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{0} , \quad (2.3)$$

wobei die algebraischen Nebenbedingungen (2.2c) auf eine singuläre Jacobimatrix $\partial \mathbf{F} / \partial \dot{\mathbf{y}}$ führen.

Zur Lösung von Systemen differentialer oder differentiell-algebraischer Gleichungen steht eine ganze Palette erprobter und problemangepasster Integrationsverfahren zur Verfügung, zu deren Theorie und Anwendung sei u.a. auf [DeuffhardBornemann94, AscherPetzold98, Eich-SoellnerFührer98] verwiesen; ein Beispiel zur numerischen Integration von DAGL-Systemen wäre der weit verbreitete Integrationscode DASSL, [BrenanCampbellPetzold96]. In Kapitel 5 wird nochmal ausführlicher auf Theorie und Lösung von DAGL-Systemen eingegangen.

2.1.3 Modellierung von Schienenfahrzeugen

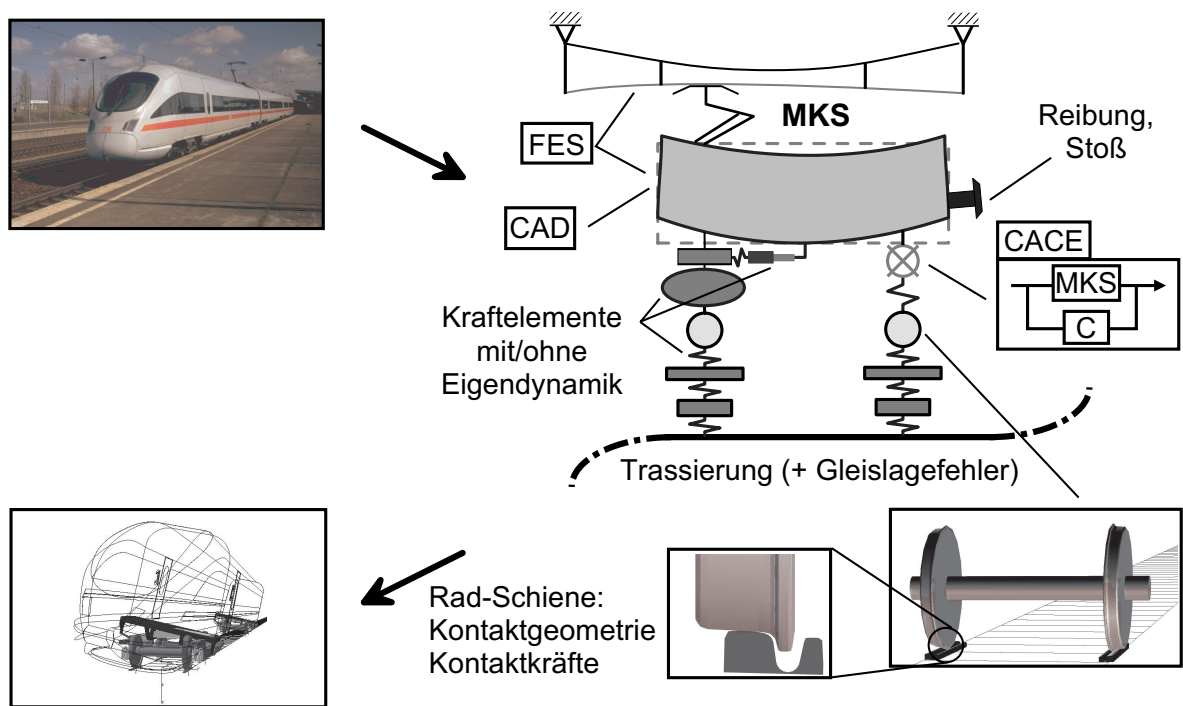


Abbildung 2.3: Modellierung und Modellierungselemente eines Schienenfahrzeuges zur Simulation der Laufdynamik, aufbauend auf einem Mehrkörperansatz. (Photographie: C. Splittgerber, Internet: <http://mercurio.iet.unipi.it>).

Die Simulation der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen, seien es Personenwagen, Güterwagen, Lokomotiven oder Triebköpfe, baut in den meisten Fällen auf einer Modellierung als Mehrkörpersystem auf. Hierbei ist oft ein Ansatz auf der Grundlage eines Systems starrer Körper ausreichend. In Sonderfällen muss im Hinblick auf realistische Ergebnisse das Gesamtsystem jedoch als hybrides MKS bestehend aus starren und elastischen Körpern modelliert werden. So haben Vergleiche von Simulationsergebnissen mit Messungen an realen Fahrzeugen im Betrieb gezeigt, dass zur simulatorischen Untersuchung des Fahr-

komforts oft zumindest der Wagenkasten über einen FES-Ansatz als elastisch modelliert werden muss, [StriberskyMoserRulka00, OfierzynskiBrundisch00]. In Abb. 2.3 ist ein generisches MKS-Modell eines Schienenfahrzeuges skizziert. Neben den systemspezifischen Modellierungselementen sei dabei insbesondere auf die gegebenenfalls erforderlichen Ankopplungen anderer CAE²-Programmsysteme hingewiesen.

Neuentwicklungen von Fahrzeugen werden heutzutage dem Stand der Technik gemäß auf der Grundlage von CAD³-Systemen erstellt. Diese ermöglichen die detaillierte grafische Repräsentation von Teilsystemen wie beispielsweise dem Wagenkasten oder dem Drehgestellrahmen. Um eine möglichst wirklichkeitsnahe Animation der Simulationsergebnisse des MKS zu gewährleisten, können diese Grafikdarstellungen, die entsprechenden Schnittstellen vorausgesetzt, direkt in die grafische Repräsentation des MKS-Modells eingebunden werden. Eine andere Anwendung der Kopplung MKS – CAD besteht in der unmittelbaren Einbindung der MKS-Dynamiksimulation in das CAD-Programm selbst. Unter der Annahme bidirektionaler Schnittstellen werden dabei Änderungen des CAD-Modells automatisch an das MKS-Modell übergeben – und umgekehrt.

Im Laufe der letzten Jahre hat sich die Neigetechnik als gut geeignetes Mittel zur Erhöhung der Fahrgeschwindigkeiten auf kurvenreichen Streckenführungen etabliert. Neben deren passiver Realisierung kommt dabei auch eine aktive, d.h. geregelte Neigetechnik zur Anwendung. Der Entwurf entsprechender Regelalgorithmen erfordert entweder deren direkte Einbindung in das MKS oder aber die Ankopplung geeigneter CACE⁴-Software. Andere Anwendungsbereiche der Regelungstechnik in Schienenfahrzeugen sind beispielsweise eine semiaktive vertikale Dämpfung zwischen Wagenkasten und Drehgestell wie auch eine aktive Querzentrierung des Wagenkastens, [RathStriberskyMüller97].

Zur Modellierung der Primär- und Sekundäraufhängungen der Fahrzeuge (Radsatz – Drehgestell bzw. Drehgestell – Wagenkasten) kommt die gesamte Bandbreite linearer und nichtlinearer Krafterelemente zum Einsatz: Blatt- und Schraubenfedern weisen gekrümmte oder geknickte Kennlinien auf und eine ausreichend genaue Wiedergabe der Kraft-Weg-Charakteristik erfordert oftmals die Berücksichtigung von Hysterese-Effekten. Die Wirkung von Schakengehängen lässt sich meist mit ausreichender Genauigkeit durch gemessene, nichtlineare Kennlinien annähern. Anschläge vereinen hohe Steifigkeiten mit spielbehafteten Kennlinien. Zur Modellierung von Luftfedern müssen die entsprechenden Gasgesetze in das Simulationsmodell eingebracht werden. Die gummigelagerte Aufhängung von Schlingerdämpfern bedingt eine Nachbildung als Feder-Dämpfer-System in Reihe, also als Krafterelement mit Eigendynamik. Diese kurze, unvollständige Aufzählung zeigt bereits, dass die Fahrzeugaufhängungen eine in der Regel nicht zu vernachlässigende Quelle für bedeutende Nichtlinearitäten im System darstellen.

Zur Beurteilung der Laufdynamik ist meist die Simulation von Einzelwagen oder Lokomotiven ausreichend. Besondere Anforderungen wie die Untersuchung der Längsdynamik von Zügen oder die Bewertung der Entgleisungssicherheit von Güterwagen (einem wichtigen Zulassungskriterium für Neuwagen, [SchuppSchroederJaschinskiRöbke98]) erfordern aller-

²CAE – Computer Aided Engineering

³CAD – Computer Aided Design

⁴CACE – Computer Aided Control Engineering

dings die Simulation vollständiger Wagenverbände. Die dann zu berücksichtigende Interaktion zwischen den einzelnen Wagen über Zugeinrichtung und/oder Puffer stellt zusätzliche Anforderungen an die Modellbildung. Haft- und Gleitreibungseffekte zwischen sphärischen Pufferköpfen sind dann ebenso zu modellieren wie eine eventuelle Strukturänderung des Systems aufgrund deren Kontaktes/Nicht-Kontaktes.

Ein wichtiges Kriterium bei der Auslegung oder Bewertung von Schienenfahrzeugen stellt deren Führ- und Störgrößenverhalten dar. Das Führverhalten beschreibt die Fahrzeugreaktionen bei der Bewegung (mit konstanter Geschwindigkeit) entlang einer beliebig vorgegebenen, idealen Trassierung. Das Störgrößenverhalten hingegen beschreibt die Reaktionen eines Fahrzeuges auf in der Regel kleine Abweichungen von der idealen Trassenführung, dargestellt als fahrwegabhängige Anregungen. Um der Realität möglichst nahe kommende Simulationsergebnisse zu garantieren, muss die Möglichkeit gegeben sein, im Simulationsmodell sowohl vermessene Trassierungen als auch regellose Gleislagefehler – gemessen oder definiert als stochastischer Prozess, [KortümLugner94] – berücksichtigen zu können. Im Zuge des Aufbaus oder Austestens eines Simulationsmodells oder für vergleichende Simulationen wird indes häufig auf zwar frei parametrierbare, jedoch fest vorgegebene Modelle von Trassierungen und Gleislagefehlern zurückgegriffen.

Ausführlicher wird auf die Modellierung von kompletten Rad–Schiene–Systemen z.B. in [GargDukkipati84] eingegangen. Die bisher angesprochenen Modellierungsaspekte sind in ihrer Gesamtheit zwar durchaus charakteristisch für Simulationsmodelle von Schienenfahrzeugen, treten in unterschiedlichem Maße und unterschiedlicher Kombination aber generell bei Fahrzeugmodellierungen oder maschinendynamischen Simulationaufgaben auf. Das Alleinstellungsmerkmal von Schienenfahrzeugen und damit auch deren Simulation ist jedoch der Kontakt von Stahlrad auf Stahlschiene und das daraus resultierende Grundproblem, dass über sehr kleine Kontaktgebiete sehr große Kräfte übertragen werden. Daneben stellt der Kontakt zwischen Rad und Schiene auch eine das Bewegungsverhalten eines Schienenfahrzeuges stark beeinflussende Quelle von Nichtlinearitäten dar. Da der Anstoß zu dieser Arbeit auf die Untersuchung von Rad–Schiene–Systemen zurückzuführen ist, wird im folgenden Abschnitt auf die Modellierung des Rad–Schiene Kontaktes näher eingegangen.

2.1.4 Modellierung des Kontaktes zwischen Rad und Schiene

Die Simulation der Kontaktvorgänge zwischen Rad und Schiene baut auf der Theorie des rollenden Kontakts auf, die in [Kalker90, Johnson85] sehr ausführlich beschrieben ist. Grundlegende Ideen der Theorie sind die Entkopplung der komplexen Kontaktvorgänge in ein *Normal*- und ein *Tangential*problem, siehe Abb. 2.4, sowie die Modellvorstellung des *elastischen Halbraumes*, die zu einem expliziten Zusammenhang zwischen Spannungen und Verschiebungen im Kontaktgebiet führen. Eine weitere wesentliche Vereinfachung stellt die strikte Trennung in Kontaktgeometrie und Kontaktmechanik dar. Aus der Lösung des Kontaktgeometrieproblems folgen die Lage des Kontaktpunktes als Kraftangriffspunkt aller sich aus den Vertikal- und Tangentialspannungen ergebenden Kontaktkräfte, die Zwangsbedingung (2.2c) sowie die tangentiale Wirkebene der sich einstellenden Reibkräfte. Die Kontaktmechanik erlaubt die eigentliche Bestimmung der Kontaktkräfte

aus kinematischen und die Kontaktfläche charakterisierenden geometrischen Größen: Den Schlupfgrößen (auf die Fahrgeschwindigkeit bezogene Relativgeschwindigkeiten der Kontaktpartner im Kontaktpunkt) und den lokalen Krümmungsverhältnissen, der Größe der Kontaktflächen usw.

Abgesehen von diesen Gemeinsamkeiten unterscheiden sich die einzelnen Implementierungen in Softwarepaketen zur Simulation von Schienenfahrzeugen aber doch erheblich in der mathematischen Formulierung sowie der programmtechnischen Umsetzung. Im Folgenden wird exemplarisch die Realisierung im Rahmen des Rad-Schiene-Moduls von SIMPACK skizziert, die Ausführungen folgen dabei in den wesentlichen Punkten [Netter98], dort ist auch der gesamte Kontaktmodul ausführlich beschrieben. Eine Kurzzusammenfassung mit Anwendungen auf komplexe Simulationsproblematiken und Vergleichen von Simulationsergebnissen mit Feldmessungen ist u.a. in [NetterSchuppRulkaSchroeder98, SchuppJaschinski99] zu finden.

Unter der Annahme eines *starren Kontakts* zwischen Rädern und Schienen weist das mechanische Ersatzmodell eines Radsatzes im Gleis (Abb. 2.4) eine kinematisch geschlossene Schleife auf und die Bewegungsgleichungen dieses Subsystems ergeben sich als DAGL-System (2.2). Wird diese starre Verbindung rechts und links durch je ein einseitig wirkendes Feder-Dämpfer-Element mit entsprechend hoher Steifigkeit ersetzt, können die Bewegungsgleichungen dagegen als GDGL-System (2.1) formuliert werden. Dieser Ansatz hat zwar in bestimmten Anwendungsfällen bedeutende Vorteile – beispielsweise ist Radanheben und -aufsetzen sehr einfach modellierbar – wegen der Unsicherheit bei der Bestimmung der Kraftparameter (vor allem der Materialdämpfung) sowie unter numerischen Gesichtspunkten ist jedoch in den meisten Fällen die Modellierung als starrer Kontakt vorzuziehen. Die notwendigerweise sehr hohen Steifigkeiten, in [Slivsgaard95, S. 43] und [Vohla96, S. 97] wird $c = 10^9$ N/m vorgeschlagen, führen zu einer allgemeinen Versteifung des Systems, die sich wiederum in einem bedeutenden Anstieg der Rechenzeit bemerkbar machen kann, [Netter98, Schupp96] und [Vohla96]. Varianten beruhen auf der Betrachtung des elastischen Kontakts auf der Grundlage der Hertzschen Kontakttheorie, [KikPiotrowski86, SauvagePascal90].

Zwar stellt der klassische starre Radsatz nach wie vor das am häufigsten verwendete Grundkonzept eines Fahrgestells von Schienenfahrzeugen dar, neuere Konzepte wie Niederflur-Straßenbahnen erfordern jedoch einzeln aufgehängte Räder. Aus diesem Grund besteht die Basiseinheit des Rad-Schiene-Moduls aus einem Einzelrad, das sich in Kontakt mit einer Schiene befindet. Damit lassen sich aber auch in Sonderfällen erforderliche biege- und/oder torsionselastische Radsatzachsen sowie flexible Radscheiben modellieren.

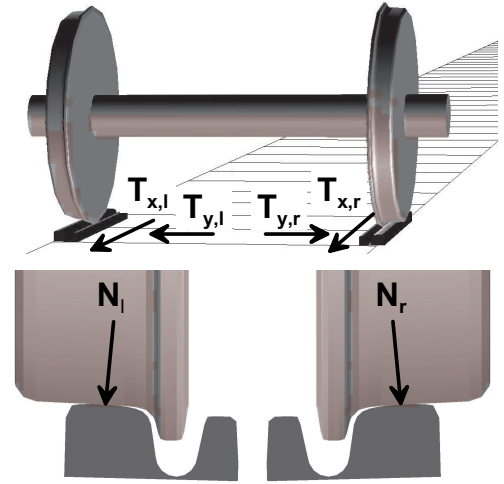


Abbildung 2.4: Kontaktkräfte: Normalkräfte N_l, N_r , Tangentialkräfte $T_{x,l}, T_{y,l}, T_{x,r}, T_{y,r}$.

Modelliert als Starrkörper besitzt ein Rad sechs Bewegungsfreiheitsgrade, die aus Relativlage und -verdrehung des Radprofilreferenzsystems \mathbf{R} bezüglich des Gleisprofilreferenzsystems \mathbf{G} folgen. Dabei ist die Längsbewegung durch die große Absolutbewegung des Rades entlang der Trasse gegeben. Unter der Annahme eines rotationssymmetrischen Rades sowie einer in Laufrichtung prismatischen Schiene verbleiben zur Beschreibung der Starrkörperbewegung des Rades relativ zur Schiene dann zwei kartesische Koordinaten (lateral und vertikal) sowie zwei Drehkoordinaten (rollen und gieren): $\mathbf{q} = (y, z, \varphi, \psi)$.

Die vorzeichenbehaftete Distanzfunktion $d(s, \mathbf{q})$ misst nun gemäß nebenstehender Abbildung (aus [Netter98]) den Abstand zweier entsprechender Punkte auf der Schienenprofil- und der Radprofilkurve in vertikaler z -Richtung in Abhängigkeit von der lateralen Radprofilkoordinate s und dem Koordinatenvektor \mathbf{q} . Das Geometrieproblem ist somit auf eine eindimensionale Abstandsmessung für jeden Profilkpunkt reduziert und führt auf die klassische Kontaktbedingung

$$g(\mathbf{q}) = \max_s d(s, \mathbf{q}) = 0. \quad (2.4)$$

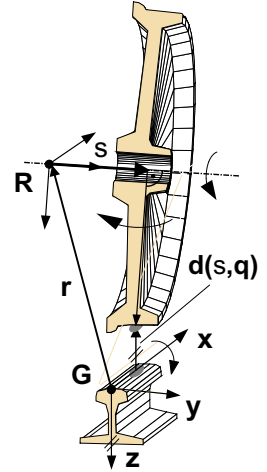
Die Lage des Kontaktpunktes, repräsentiert durch die laterale Profilkordinate $s = s^*$ im Radprofilreferenzsystem, ergibt sich dann aus der notwendigen Bedingung

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} d(s, \mathbf{q}) \right|_{s=s^*} = 0, \quad (2.5)$$

siehe hierzu auch [FisetteSamin94]. Da nun aber die Relativkoordinaten \mathbf{q} von den MKS-Lagekoordinaten \mathbf{p} in den Bewegungsgleichungen (2.2) abhängen, stellt die Kontaktbedingung (2.4) die algebraische Zwangsbedingung (2.2c) dar.

Damit für die Bewegungsgleichungen (2.2) eine Lösung existiert, müssen neben den kinematischen und dynamischen Gleichungen (2.2a), (2.2b) auch die Zwangsbedingungen (2.2c) bzw. (2.4) sowie deren erste und zweite zeitliche Ableitungen – und damit auch die Kontaktpunktlage nach (2.5) – gewissen Stetigkeits- und Glattheitsanforderungen genügen. Und damit stößt obiges „starre“ Kontaktmodell rasch an seine Grenzen. Für einfache Profilpaarungen wie z.B. ein kegeliges Radprofil auf einem *UIC60-ORE*-Schienenprofil ist es zwar gut geeignet und sehr effektiv umsetzbar; bei Anwendung aber auf die in Deutschland weit verbreitete Verschleißprofilpaarung⁵ *S1002/UIC60-ORE* beispielsweise, ist die mit (2.5) definierte Kontaktpunktlage nicht mehr stetig von den Relativkoordinaten $\mathbf{q}(t)$ abhängig, es treten so genannte *Kontaktpunktsprünge* auf. Diese sind an der mit „starr“ bezeichneten Kurve in Abb. 2.5 leicht erkennbar.

Um den Glattheitsanforderungen auch im Falle von Verschleißprofilen zu genügen, wird auf ein so genanntes regularisiertes Kontaktmodell übergegangen. Dessen Grundgedanke ist, unter Beibehaltung der Formulierung als kinematischer Zwang die elastische Defor-



⁵Verschleißprofile nehmen die sich aufgrund von langfristigen Verschleißvorgängen letztlich ergebenden Profilkonturen vorweg und tragen somit zu einer Reduktion des Verschleißes von Rad und Schiene bei.

mation im gesamten Kontaktgebiet qualitativ zu berücksichtigen. Wird die Kontaktbedingung (2.4) im Rahmen eines solchen *quasi-elastischen* Kontaktmodells durch

$$g(\mathbf{q}) = \varepsilon \cdot \ln \left(\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} d(s, \mathbf{q})\right) ds \bigg/ \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \right) = 0 \quad (2.6)$$

ersetzt, sind die Glattheitsanforderungen stets erfüllt. Dabei wird der kleine Regularisierungsparameter ε so gewählt, dass bei definierter nomineller Achslast die resultierende fiktive Durchdringung zumindest der Größenordnung nach der elastischen Verformung in Richtung der Kontaktnormalen eines voll elastischen Kontaktmodells entspricht. Abhängig von der nominellen Achslast ist ε meist im Bereich $1 \cdot 10^{-5} \dots 5 \cdot 10^{-5}$ zu wählen. Mit der Gewichtungsfunktion $w(s, \mathbf{q}) := \exp(d(s, \mathbf{q})/\varepsilon)$ ergibt sich dann die aktuelle Kontaktpunktlage s^* unter der Annahme der Übereinstimmung von Kontaktpunktlage und Angriffspunkt der Kontaktkräfte als Mittelwert der damit gewichteten Radprofilkoordinate $s \in [s_{\min}, s_{\max}]$,

$$s^* = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} s \cdot w(s, \mathbf{q}) ds \bigg/ \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} w(s, \mathbf{q}) ds .$$

Der Erfolg des quasi-elastischen Kontaktmodells gegenüber dem starren Kontaktmodell wird in Abb. 2.5 verdeutlicht, entstanden aus einer Variation der relativen Querverschiebung y zwischen Rad und Schiene (der Rollwinkel $\varphi = 1.4^\circ$ entspricht annähernd einer Schieneneinbauneigung $1 : X = 1 : 40$). Das quasi-elastische Kontaktmodell führt auf eine sehr viel gleichmäßigere Verteilung der Kontaktpunkte im in Frage kommenden Kontaktbereich, die Kontaktpunktsprünge des starren Kontaktmodells werden dadurch geglättet. Bemerkenswert ist noch, dass diese Sprünge nicht auf den Bereich der Hohlkehle des Rades ($y \approx 3 \text{ mm}$), den Übergang vom Laufbereich zur Flanke also, beschränkt sind.

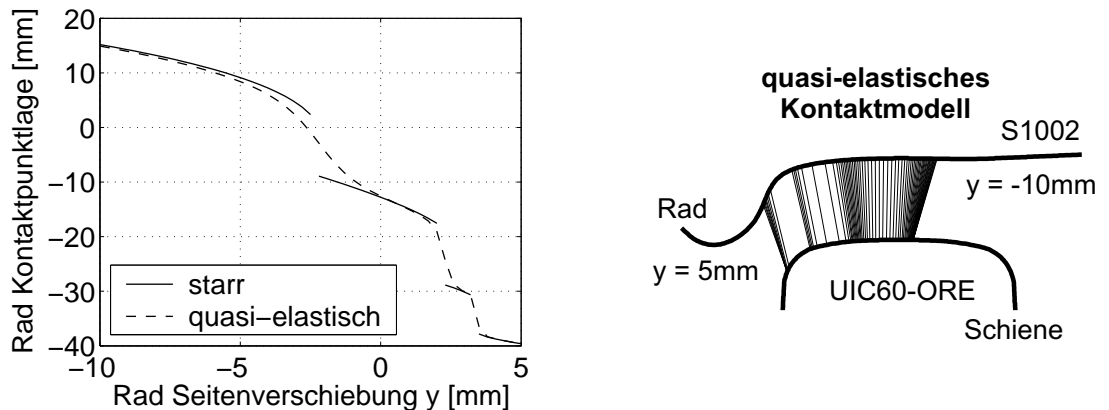


Abbildung 2.5: Quasi-elastisches Kontaktmodell. *Links*: Laterale Radkontaktpunktlage $s^*(y)$ im Vergleich mit starrem Kontaktmodell. *Rechts*: Profilquerschnitte für Rad und Schiene mit Berührungspunktzuordnung. Parameter: Profilpaarung *S1002/UIC60-ORE*, $y = [-10 \text{ mm}; 5 \text{ mm}]$, $\varphi = 1.4^\circ$, $\psi = 0^\circ$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$.

Das quasi-elastische Kontaktmodell genügt zwar den Glattheitsanforderungen, die zur Auswertung der Integrale erforderliche Diskretisierung der Kontaktgeometrie bedingt aber dennoch einen erheblichen Aufwand an Rechenzeit (das gleiche Problem stellt sich auch beim starren Kontaktmodell). Da nun aber das Kontaktgeometrieproblem für die meisten industriellen Anwendungen allein in Abhängigkeit von den drei Relativkoordinaten (y, φ, ψ) gelöst werden kann, lässt dessen a priori Auswertung eine erhebliche Verringerung der Rechenzeit erwarten. In [ArnoldNetter97] werden für die dann erforderliche Tabellierung zweidimensionale Tensorprodukt–Splines mit freiem Polynomgrad vorgeschlagen, wobei für kleine Gierwinkel ψ Symmetrieeigenschaften nutzbar sind. Im Rahmen einer Simulation erbringt die auf diesen Tabellen aufbauende Approximation nach [Schupp96] einen Rechenzeitgewinn um einen Faktor von 3 bis 5.

Zur Behandlung der *Kontaktmechanik* werden die Kontaktkräfte gemäß Abb. 2.4 in im Kontaktpunkt wirkende Normalkräfte und Tangentialkräfte⁶ (Schlupfkkräfte) aufgeteilt und getrennt berechnet. Bei entsprechender Formulierung der Kontaktnebenbedingung (2.2c) ergibt sich die Normalkraft \mathbf{N} direkt aus den verallgemeinerten Zwangskräften $-\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}$ der Bewegungsgleichungen (2.2). Wählt man hingegen zur Modellierung den Ansatz über eine elastische Kontaktfeder, ergibt sich die Normalkraft \mathbf{N} als eingepreßte Kraft. Unter der Annahme eines einseitig wirkenden linearen Feder–Dämpfer–Gesetzes folgt in Abhängigkeit von der elastischen Verformung \bar{d} in Richtung der Kontaktnormalen und der entsprechenden Geschwindigkeit $\dot{\bar{d}}$

$$\|\mathbf{N}\| := \begin{cases} 0 & \text{für } \bar{d} \leq 0 \\ c_N \cdot \bar{d} + d_N \cdot \dot{\bar{d}} & \text{für } \bar{d} > 0 \end{cases} ;$$

die Wirkrichtung ist durch die Normale an die Tangente des Schienenprofils im Kontaktpunkt bestimmt. Das Kraftgesetz ist durch die Federsteifigkeit c_N sowie die Dämpferkonstante d_N eindeutig charakterisiert.

Die Grundlagen zur Berechnung der tangentialen Schlupfkkräfte zwischen Rad und Schiene, die Schlupfkraft–Schlupf–Beziehungen, sind in der *Theorie des rollenden Kontakts* von KALKER, [Kalker90], gelegt. Das daraus entstandene Programmsystem CONTACT gilt zwar als Referenz, ist aber aufgrund eines extrem hohen Rechenzeitbedarfs im Rahmen einer Simulation nicht einsetzbar. Einen im Zuge von Rad–Schiene–Simulationen sehr häufig verfolgten Ausweg bildet die ebenfalls von KALKER stammende so genannte *vereinfachte Theorie des rollenden Kontakts* sowie deren programmtechnische Umsetzung FASTSIM. Der einfachste, analytische Ansatz baut auf der *linearen Theorie* unter der Annahme eines Hertzschen, d.h. elliptischen Kontakts auf. Dabei ergeben sich die Schlupfkkräfte T_x, T_y in longitudinaler und lateraler Richtung (siehe Abb. 2.4) sowie das Bohrmoment als lineare Funktionen der Starrkörperschlüpfe ν_x, ν_y und φ_z , den in der Regel auf die Fahrgeschwindigkeit bezogenen lokalen Relativgeschwindigkeiten im Kontaktpunkt. Es gilt (das oft vernachlässigte Bohrmoment ist nicht angegeben):

$$T_x = -G c^2 C_{11} \cdot \nu_x \quad (2.7a)$$

$$T_y = -G c^2 (C_{22} \cdot \nu_y + c C_{23} \cdot \varphi_z) . \quad (2.7b)$$

⁶Die Richtungsangaben „normal“ und „tangential“ beziehen sich dabei auf die Tangentialebene der Kontaktpartner im Kontaktpunkt.

Die darin vorkommenden Kalker-Koeffizienten C_{ij} sind in Abhängigkeit vom Halbachsenverhältnis a/b der Kontaktellipse z.B. in [PoppSchiehlen93, S. 138] tabelliert verfügbar. Der werkstoffabhängige Gleitmodul ist durch G repräsentiert; sind a, b die Halbachsen der Kontaktellipse, gilt für deren mittlere Halbachse $c = \sqrt{a \cdot b}$. Mit steigenden Starrkörperschlüpfen zeigen die Reibkräfte jedoch ein zunehmend ausgeprägteres Sättigungsverhalten mit der Coulomb-Reibung $\mu \cdot \|\mathbf{N}\|$ als Begrenzung, siehe Abb. 2.6. Dessen Approximation stellt zusammen mit der eventuellen Berücksichtigung von Spineffekten das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der auf der linearen Theorie aufbauenden, unterschiedlichen heuristisch-analytischen Ansätze dar; als Beispiel sei [ShenHedrickElkins84] genannt.

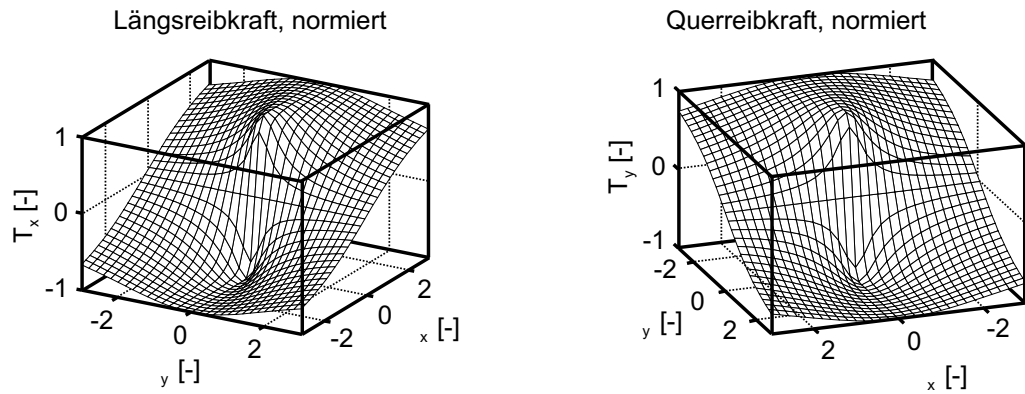


Abbildung 2.6: Normierte Längs- und Querreibkraft T_x, T_y in Abhängigkeit von normiertem Längs- und Querschlupf ν_x, ν_y , Spin ist Null. Berechnet mit FASTSIM, aus [Netter98].

2.1.5 Spurführung von Schienenfahrzeugen: Sinuslauf, Schlingerlauf und Grenzzyklusverhalten

Das grundlegende Prinzip der Spurführung von Schienenfahrzeugen besteht im rollenden Kontakt eines starren Radsatzes zu den Schienen, wobei die beiden Räder über eine starre Achse verbunden sind. Beschränkt man sich bei der Modellierung auf einen einzelnen, freien, starren Radsatz, wird das Bewegungsverhalten unter der Annahme kegelförmiger Räder auf geraden rechteckigen Schienen analytisch zugänglich. Werden weiter rein kinematisches Rollen ohne Gleiten sowie ausschließlich kleine Relativbewegungen vorausgesetzt und die Massenwirkungen vernachlässigt, folgt nach [PoppSchiehlen93] die harmonische Querbewegung $y(x) = y_0 \cos \Omega x$ des Radsatzes relativ zum Gleis als Lösung der Differentialgleichung ($y'' := d^2y/dx^2$)

$$y''(x) + \Omega^2 y(x) = 0, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\tan \delta_0}{R_0 r_y}}.$$

Dieser so genannte *Sinus-* oder *Wellenlauf* ist in Abb. 2.7 skizziert. Die Wegkreisfrequenz Ω hängt dabei allein vom nominalen Radrollradius R_0 , der halben Spurweite r_y des Gleises

sowie dem die Konizität der Räder beschreibenden Kegelwinkel δ_0 ab. Damit folgt dann die Wellenlänge λ_K der Bewegung als KLINGELsche Formel zu

$$\lambda_K = 2\pi \sqrt{\frac{R_0 r_y}{\tan \delta_0}}. \quad (2.8)$$

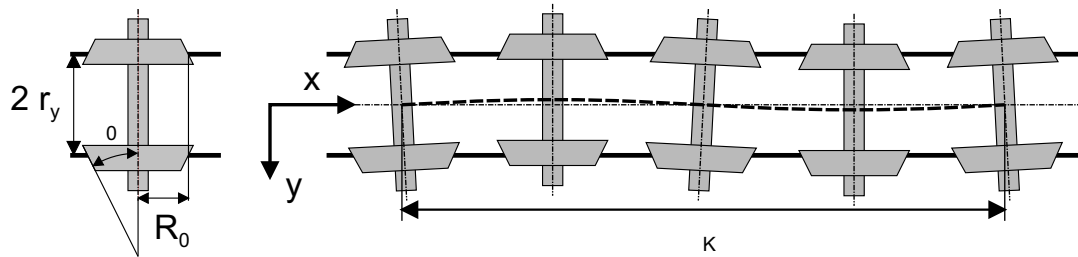


Abbildung 2.7: Das Prinzip der Spurführung: Kinematischer Wellenlauf eines freien Radsatzes.

Im Hinblick auf eine möglichst realitätsnahe Wiedergabe des Bewegungsverhaltens von Schienenfahrzeugen sind die oben genannten Annahmen in den allermeisten Fällen jedoch nicht gültig: Im Betriebsfall liegt kein kinematisches Rollen vor, die Radsatzaufhängung, und damit das gesamte Fahrzeugsystem, wirken auf die Radsatzbewegung zurück und reale Profilierungen von Rädern und Schienen weichen erheblich von einem Kegel- bzw. Rechteckprofil ab. Letzteres verdeutlicht insbesondere die in Abb. 2.5 dargestellte Verschleißprofilpaarung, die auf den ebenfalls dort aufgezeigten nicht stetigen Zusammenhang zwischen Querversatz eines Rades und lateraler Kontaktpunktlage führt.

Neben der Systemdämpfung und ebenfalls nichtkonservativen Schlupfkraften zwischen Rad und Schiene beeinflussen also u.a. Profilierung und Massenwirkungen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit v die Bewegung eines Schienenfahrzeuges im Gleis (Stabilitätsverhalten). Die Systemdämpfung entsteht dabei aus den dämpfenden Eigenschaften der Fahrwerksaufhängung sowie anderer Verbindungselemente und der Materialdämpfung. Im Gegensatz zum oben beschriebenen Sinuslauf wird deshalb bei mit kleinen und moderaten Geschwindigkeiten fahrenden realen Fahrzeugen die Bewegung des Radsatzes im geraden Gleis, angefacht durch die in der Realität stets vorhandenen Gleislagefehler, soweit gedämpft, dass sich im eingeschwungenen Zustand eine stabil stationäre Gleichgewichtslage einstellt – dies ist der normale Betriebsbereich eines Schienenfahrzeuges. Wie aus den Gleichungen (2.7) ersichtlich, stellen nun jedoch die Schlupfkraften im Kontakt zwischen Rad und Schiene Dämpfungskräfte dar, die mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit *abnehmen*. Damit ist aber ab einer bestimmten Grenzggeschwindigkeit (der kritischen Geschwindigkeit v_{krit}) die Gesamtheit der Dämpfungseffekte nicht mehr ausreichend und einmal angeregte Schwingungen klingen nicht mehr ab sondern auf. Im Falle einer rein linearen Betrachtung, wie sie z.B. in [PoppSchiehlen93] aufgezeigt ist, wachsen die (lateralen) Fahrzeugschwingungen für ein $v > v_{\text{krit}}$ dann immer weiter an. Im realen Fahrzeug, und folglich auch bei einer nichtlinearen Betrachtung, stellt sich hingegen ein in den genannten Nichtlinearitäten begründetes oszillatorisches Bewegungsverhalten mit begrenzter Amplitude ein, ein *stabiler Grenzzyklus*, der auch als *Schlingerlauf* bezeichnet wird. Grenzzyklen

treten in den unterschiedlichsten dynamischen Systemen auf, weitere Beispiele sind das Radflattern im Kfz-Bereich sowie durch Luftkräfte induzierte Flatterschwingungen von Flugzeugtragflächen.

Grenzzyklusschwingungen eines Rad-Schiene-Systems setzen sich im Wesentlichen aus kombinierten Lateral- und Gierbewegungen der Radsätze und des gesamten Fahrzeuges zusammen und müssen im normalen Fahrbetrieb vermieden werden. Folglich ist aber auch nach [Wickens65, Hillenbrand93] die Grenzggeschwindigkeit v_{krit} ein sehr wichtiges Kriterium bei der Auslegung bzw. Bewertung von Schienenfahrzeugen. Die Amplitude des sich einstellenden Grenzzzyklus ist bei konstanten Fahrzeugparametern allein abhängig von der Fahrgeschwindigkeit, ergibt sich also unabhängig von den gewählten Anfangsauslenkungen (abgesehen von einem Übergangsgebiet im Bereich der Grenzggeschwindigkeit, in dem sich bei ein und derselben Geschwindigkeit v entweder eine stabile stationäre Gleichgewichtslage oder aber ein Grenzzzyklus einstellen kann, Näheres dazu in Abschnitt 3.1.2).

Zur Verdeutlichung der Spurführung von Rad-Schiene-Systemen ist in Abb. 2.8 anhand seiner Querverschiebung $y(t)$ das Schwingungsverhalten eines einzelnen, in einem kinematisch geführten Dummy-Körper aufgehängten Radsatzes aufgezeigt, das sich bei drei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten v einstellt. Grundlage bilden jeweils zwei Simulationsmodelle, die sich in der Modellierung des Rad-Schiene Kontaktes unterscheiden. Entsprechende Phasenportraits $\dot{y}(y)$ bei der Geschwindigkeit $v = 60.0 \text{ m/s}$ zeigt Abb. 2.9. Der Radsatz fährt in einem idealen, ungestörten und geraden Gleis. Die Kurvendarstellungen sind mittels Zeitschrittintegrationen erzeugt, wobei der Radsatz eine Anfangsauslenkung von $y(t=0) = 3.0 \text{ mm}$ aufweist.

Das Simulationsmodell dieses Radsatzes ist in Abschnitt 6.4.2 sowie in Anhang B.1 näher beschrieben. Für das erste Modell ist eine Kegelkontur der Räder mit einem Kegelwinkel $\delta_0 = 0.05 \text{ [rad]}$ gewählt (siehe Abb. 2.7), für die Schienen ein Kreisprofil mit Profilradius $R_s = 0.21 \text{ m}$. Die Schlupfkräfte folgen aus der linearen Theorie gemäß Gleichung (2.7). Man erhält nahezu lineare Bewegungsgleichungen, schwache Nichtlinearitäten resultieren z.B. aus der nicht linearisierten Kinematik und aus der Beeinflussung der Schlupfkräfte durch die Kontaktnormalkräfte (über die mittlere Halbachse c der Kontaktellipse, siehe Gleichung 2.7). Im zweiten Modell sind hingegen sämtliche Nichtlinearitäten des Rad-Schiene Kontaktes vollständig berücksichtigt: Räder bzw. Schienen sind mit der in Abb. 2.5 dargestellten Verschleißprofilpaarung *S1002/UIC60-ORE* ausgestattet, die Schlupfkräfte ergeben sich mit Hilfe des FASTSIM-Algorithmus. Im Gegensatz zu der nichtlinearen Kontaktgeometrie der Verschleißprofilpaarung, charakterisiert durch eine nicht stetige Kontaktpunktlage $s^*(y)$ (nachträglich geglättet allerdings durch das quasi-elastische Kontaktmodell, siehe auch Abb. 2.5), ergibt sich aus der Profilpaarung Kegel-Kreis eine lineare Kontaktgeometrie und damit ein linearer Zusammenhang $s^* = s^*(y)$.

Im Falle des nahezu linearen Modells klingt die Anfangsauslenkung bei den beiden kleineren Geschwindigkeiten ab, das Verhalten ist asymptotisch stabil. Da der stabile Grenzzzyklus ein ausschließlich nichtlineares Phänomen ist, müsste eigentlich nach Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit das Systemverhalten vollständig instabil werden und die Amplitude der Querauslenkung immer weiter anwachsen (bei Vernachlässigung aller Nichtlinearitäten). Wie das zugehörige Phasenporträt in Abb. 2.9 links zeigt, setzen

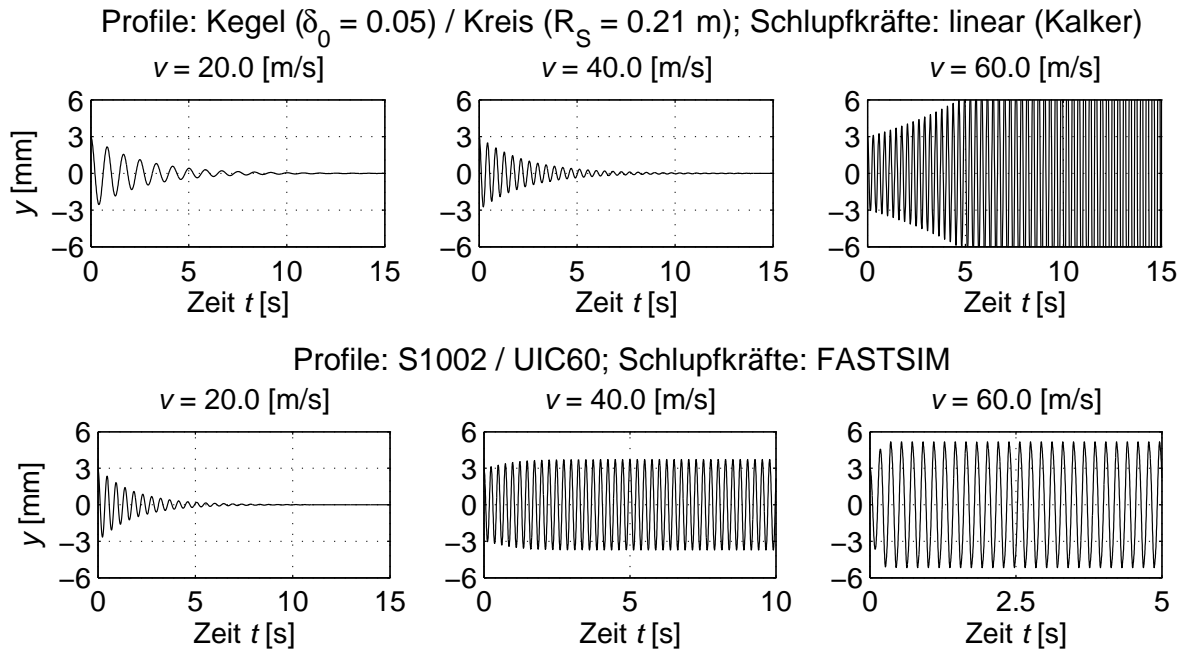


Abbildung 2.8: Grenzzzyklusverhalten eines einzelnen Radsatzes anhand dessen Querverschiebung y : Einfluss von linearer und nichtlinearer Kontaktgeometrie (Kegel auf Kreis \leftrightarrow Verschleißprofil *S1002/UIC60-ORE*) sowie von linearer und nichtlinearer Schlupfkraft-Schlupf-Beziehung (lineare Theorie (2.7) \leftrightarrow FASTSIM). Man beachte die unterschiedlichen Zeitskalierungen.

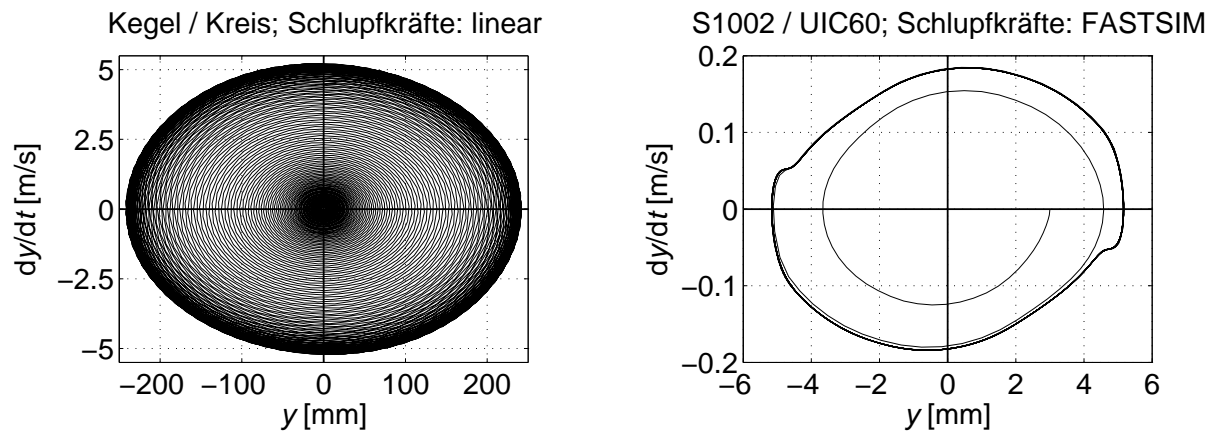


Abbildung 2.9: Phasenportraits $\dot{y} = \dot{y}(y)$ der Querverschiebung y des Einzelradsatzes bei der Fahrgeschwindigkeit $v = 60.0$ m/s.

sich allerdings bei einer Geschwindigkeit $v = 60.0$ m/s nach einer längeren Einschwingdauer doch die nichtlinearen Anteile durch und es tritt ein Grenzzzyklus auf. Der geringe Einfluss der Nichtlinearitäten manifestiert sich hierbei in der hohen Einschwingdauer ($T_{\text{ein}} \approx 50.0$ s) und der großen Schwingungsamplitude des Grenzzzyklus ($y_{\text{max}} \approx 240.0$ mm). Eine lineare Systemanalyse ergibt als Näherung für die kritische Geschwindigkeit eine lineare Grenzggeschwindigkeit von $v_{\text{krit}} \approx v_{\text{lin}} = 56.5$ m/s.

Im Gegensatz dazu treten die ausgeprägten Nichtlinearitäten des *S1002/UIC60*-Modells deutlich zu Tage: Bereits bei der mittleren Geschwindigkeit $v = 40.0 \text{ m/s}$ tritt ein Grenzyklus auf. Zu beachten ist weiter, dass das *S1002*-Radprofil und insbesondere dessen Spurkranz die Amplitude der Grenzyklusschwingung erheblich einschränkt, für $v = 60.0 \text{ m/s}$ ergibt sich $y_{\max} \approx 5.2 \text{ mm}$. Im rechten Phasenportrait der Abb. 2.9 ist der Spurkranzkontakt auch anhand der symmetrischen „Zacken“ erkennbar. Die kritische Geschwindigkeit dieses Modells, das in Abschnitt 6.4.2 noch ausführlich analysiert werden wird, kann mit $v_{\text{krit}} \approx v_{\text{lin}} = 40.5 \text{ m/s}$ abgeschätzt werden. Das Phänomen, dass bereits bei einer Geschwindigkeit $v = 40.0 \text{ m/s} < v_{\text{lin}}$ ein Grenzyklus auftritt, ist einer der wesentlichen Gründe für diese Arbeit und wird in den nachfolgenden Kapiteln noch ausführlich diskutiert werden.

Dass die beschriebenen Phänomene wie Grenzyklus (Schlingerlauf), ausgeprägtes Übergangsverhalten und Beschränkung der Bewegung durch Spurkranzkontakt auch an Simulationsmodellen vollständiger Schienenfahrzeuge – und damit am realen Fahrzeug – auftreten, zeigt Abb. 2.10. Grundlage dieser Simulation ist das in Abschnitt 7.1.1 und in Anhang B.3 beschriebene Modell eines Reisezugwagens. Übergangsverhalten und Grenzyklusschwingung bei einer konstanten Fahrgeschwindigkeit von $v = 160 \text{ m/s}$ sind dabei durch den Querversatz y_{RS3} des führenden Radsatzes des hinteren Drehgestells über der Zeit sowie das zugehörige Phasenportrait $\dot{y}_{\text{RS3}} = \dot{y}_{\text{RS3}}(y_{\text{RS3}})$ repräsentiert. Das Bild ist das Ergebnis einer Zeitschrittintegration der Fahrt im idealen, ungestörten und geraden Gleis. Im Vergleich mit dem Grenzyklusverhalten eines Einzelradsatzes in Abb. 2.8 wird der Einfluss des Gesamtfahrzeugsystems und insbesondere auch der Primär- und der Sekundäraufhängung sehr deutlich: Um eine vergleichbare Grenzyklusamplitude zu erreichen, ist bei dem Vollfahrzeug eine sehr viel höhere Fahrgeschwindigkeit erforderlich.

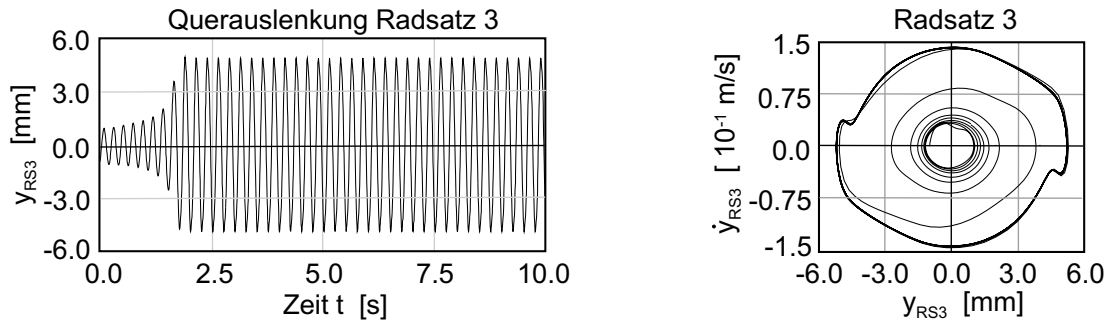


Abbildung 2.10: Übergangsverhalten und Grenzyklusschwingung eines Schienenfahrzeuges bei Fahrt im geraden Gleis mit $v = 160 \text{ m/s}$.

Im Hinblick auf Herleitung, Darstellung und weitergehender Diskussion sowohl der linearen als auch der nichtlinearen Bewegungsgleichungen von Rad-Schiene-Systemen unterschiedlichster Komplexität sei auf die entsprechende Literatur verwiesen. In [PoppSchiehlen93] werden die linearen Bewegungsgleichungen unterschiedlicher Modellierungen eines freien Radsatzes mit konischen Rädern unter Berücksichtigung der 2 Frei-

heitsgrade Querverschiebung y und Gieren ψ abgeleitet und analysiert. Ebenfalls auf Kegelprofile beschränkt sich [Jaschinski90]. Sowohl für einen freien als auch für einen wie oben beschrieben gefesselten Radsatz werden dort zuerst deren lineare, danach deren nichtlineare Bewegungsgleichungen in y , ψ hergeleitet. Die Nichtlinearität betrifft dabei im Wesentlichen die verwendeten Schlupfkraft–Schlupf–Beziehungen. Darauf aufbauend werden dann noch die nichtlinearen Systemgleichungen eines Drehgestells vorgestellt. Eine große Zahl unterschiedlichster Rad–Schiene–Systeme wird in [GargDukkipati84] behandelt. Die Spannweite der dort vorgestellten Bewegungsgleichungen reicht vom freien Radsatz mit 2 Freiheitsgraden bis hin zu einer 6–achsigen Lokomotive mit insgesamt 39 Freiheitsgraden. Die Radsätze sind dabei in letzterem Fall jeweils mit den 4 Freiheitsgraden y (lateral), z (vertikal), φ (Rollen) und ψ (Gieren) modelliert. Auch wird dort auf die Problematik nicht kegelförmiger Radprofile in Kombination mit nicht rechteckigen bzw. nicht kreisförmigen Schienenprofilen eingegangen, wie sie z.B. bei oben erwähnten Verschleißprofilpaarungen auftritt. Deren Berücksichtigung bewirkt nämlich, dass die Bewegungsgleichungen nicht mehr geschlossen analytisch angegeben werden können.

2.2 Übliche Berechnungsverfahren für Schienenfahrzeugmodelle

Ziel einer Analyse der Laufdynamik im klassischen Sinne ist es, auf der Grundlage der Spurführung der Radsätze eines Schienenfahrzeuges im Gleis sowohl das Fahrzeugverhalten als auch die zwischen Rädern und Schienen wechselwirkenden Kräfte zu beschreiben und auch zu erklären. Die laufdynamische Auslegung muss dabei einen Kompromiss zwischen den an sich entgegengesetzten Entwurfszielen eines optimalen *Geradeauslaufs* und eines optimalen *Kurvenverhaltens* erreichen. Eine hohe Laufstabilität im geraden Gleis ist im Wesentlichen durch ein rasches Abklingen störungsinduzierter Relativbewegungen hin zu einem stationären Verhalten mit verschwindenden Relativgeschwindigkeiten charakterisiert. Eine harte Lagerung bei großem Achsstand begünstigt dieses Verhalten, [Vohla96]. Dem entgegengesetzt bewirken weich gelagerte Radsätze mit kurzem Achsstand bei einer Kurvenfahrt geringere Kräfte zwischen Rad und Schiene, und damit auch zwischen Schiene und Oberbau, sowie einen reduzierten Verschleiß von Rädern als auch Schienen.

Zur rechnerischen Untersuchung der Laufdynamik kommen sowohl *lineare* als auch *nicht-lineare* Analysemethoden zum Einsatz, siehe Abb. 2.2. Unter der Annahme kleiner Abweichungen von einer Nominal– oder Referenzlage $\mathbf{y}_s = \mathbf{y}_s(t)$ führt die Linearisierung der Bewegungsgleichungen (2.1)/(2.3) (nach einer eventuell notwendigen Transformation) auf ein System linearer Differentialgleichungen, zu dessen Analyse eine ganze Reihe bewährter und erprobter mathematischer Verfahren zur Verfügung steht. Die meisten dieser Verfahren setzen allerdings Zeitinvarianz der Nominallösung und damit konstante Koeffizienten der linearen Bewegungsgleichungen voraus; die Anwendung in der Schienenfahrzeugdynamik ist folglich in der Regel auf die Fahrt im geraden Gleis mit der stationären Gleichgewichtslage als Referenzlage und auf die quasistationäre Bogenfahrt beschränkt. Die nicht-lineare Systemanalyse hingegen baut im Wesentlichen auf der numerischen Lösung der

nichtlinearen Bewegungsgleichungen (2.1)/(2.3) per numerischer Integration auf. Deren Verfahren sind zwar einerseits auf sehr viel universellere Problemstellungen wie beliebig große Bewegungen, beliebige Trassenführungen etc. anwendbar, bedürfen aber andererseits eines Vielfachen an Rechenaufwand im Vergleich zu den linearen Methoden.

Der im Vergleich gesehen sehr hohe Rechenaufwand der nichtlinearen Systemanalyse war lange Zeit auch der Grund für die deutliche Vormachtstellung der linearen Verfahren. Da nun aber in den letzten Jahren ein stetiger steiler Anstieg der verfügbaren Rechenleistung zu verzeichnen war und auch weiterhin ist und gleichzeitig die Lösungsalgorithmen für große differential- und vor allem auch große differentiell-algebraische Gleichungssysteme einen starken Aufschwung bezüglich ihrer Effizienz erfahren haben, hat sich dieses Verhältnis stark gewandelt. Ob ihrer universellen Einsetzbarkeit wird heutzutage in vielen Anwendungsfällen der Zeitintegration der Vorzug gegeben, nichtsdestotrotz haben die linearen Verfahren aufgrund spezifischer, relativ einfach zu generierender Aussagen (auch struktureller Art) nach wie vor ihre Berechtigung: Im Rahmen einer Fahrzeugauslegung oder -beurteilung kommen sowohl lineare als auch nichtlineare Verfahren zum Einsatz.

Im Folgenden sollen nun die wichtigsten, im industriellen Rahmen eingesetzten Verfahren beider Prinzipien kurz vorgestellt werden. Zur Verdeutlichung sind teilweise Ergebnisse aus einer Anwendung auf das in Abschnitt 7.1 sowie in Anhang B.3 beschriebene Modell eines Reisezugwagens beigelegt. Darauf aufbauend kann dann das im Rahmen dieser Arbeit aufbereitete Verfahren der Verzweigungsanalyse nach seiner Vorstellung im nächsten Kapitel in die Gesamtheit der bisher relevanten Simulationsverfahren der Schienenfahrzeugdynamik eingeordnet werden.

2.2.1 Lineare Systemanalyse

Die Verfahren der linearen Systemanalyse beschreiben das Bewegungsverhalten eines Systems auf der Grundlage kleiner, linearer Abweichungen $\Delta \mathbf{y}$ von einer Referenzbewegung \mathbf{y}_s , $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \Delta \mathbf{y}$. Die Annahme kleiner Bewegungen trifft bei spurgeführten Fahrzeugen immer dann zu, wenn der großen Führbewegung entlang der Trasse lediglich kleine Abweichungen von der dadurch definierten Referenzlage überlagert sind.

Nach der Linearisierung der n_y Bewegungsgleichungen (2.1) $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ bezüglich der stationären Gleichgewichtslage \mathbf{y}_s ergibt sich das lineare System (der Einfachheit halber sind die kleinen Abweichungen hier wieder mit \mathbf{y} bezeichnet)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \quad (2.9)$$

mit quadratischer Systemmatrix \mathbf{A} . Die stationäre Lösung ist dabei durch verschwindende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_s, t)$ definiert; neben der stationären Gleichgewichtslage kann natürlich auch bezüglich anderer Referenzbewegungen linearisiert werden. Da im Folgenden nur die Grundideen der einzelnen Verfahren grob skizziert werden, gehen die Ausführungen von der Darstellung (2.1) der Bewegungsgleichungen als GDGL-System aus. Für eine tiefergehende Einführung in die Linearisierung der Bewegungsgleichungen von MKS, insbesondere im Hinblick auf Fahrzeugmodelle, sei wieder auf [PoppSchiehlen93, KortümLugner94] verwiesen; dort findet sich auch eine ausführlichere

Beschreibung der hier aufgeführten Analyseverfahren sowie Hinweise zu weiterführender Literatur. Die Umsetzung der Verfahren im Rahmen eines MKS-Simulationsprogramms wird u.a. in [Rulka98] dargestellt.

Quasilinearisierung

Um den Gültigkeitsbereich der linearisierten Bewegungsgleichungen von Schienenfahrzeugmodellen zu erweitern, bauen diese oftmals auf einer Quasilinearisierung der Berührgeometrie von Rad und Schiene auf. Zur Charakterisierung der Bewegung eines starren Radsatzes mit fast konischen Rädern hat sich die *äquivalente Konizität* $\lambda_e := \Delta r / 2y$ durchgesetzt, berechnet aus der Rollradiendifferenz Δr zwischen rechtem und linkem Rad im jeweilig aktuellen Aufstandspunkt und der Querverschiebung y des Radsatzes gegenüber dem Gleis. Für reale Profilpaarungen, und dabei insbesondere im Falle von Verschleißprofilen wie *S1002/UIC60-ORE*, gilt dieser lineare Zusammenhang aufgrund der stark nichtlinearen Profilkonturen von Rad und Schiene allerdings nur sehr bedingt. Die Verfahren der Quasilinearisierung erlauben aber auch in diesem Fall die Generierung eines vergleichbaren, aussagekräftigen Kennwertes, [Mauer88].

Unter der Annahme einer periodischen Funktion $\zeta := f(x(\omega t))$ wird versucht, diese mittels eines harmonischen Ansatzes $\zeta^* := k \cdot A \sin(\omega t)$ mit linearem Verstärkungsfaktor k anzunähern. Die Betrachtung des über eine Periode gemittelten Fehlers $\varepsilon_\zeta := \zeta - \zeta^*$ führt dann auf den Linearisierungskoeffizienten $k(A)$. Angewandt auf die (nichtlineare) Funktion der Rollradiendifferenz $\Delta r(y)$ einer Profilpaarung bei einer reinen Querbewegung y des starren Radsatzes (Wellen- bzw. Sinuslauf), ergibt sich auf diese Weise die „quasilineare“ äquivalente Konizität $\lambda_e(A)$. Deren Gültigkeitsbereich wird allerdings durch die freie, geeignet festzulegende Amplitude A der Radsatzquerbewegung y begrenzt.

Die Anwendung linearer Analysemethoden setzt die vollständige äquivalente (quasi)-lineare Beschreibung der Berührgeometrie voraus. Werden analog zur äquivalenten Konizität der äquivalente Laufwinkelparameter σ durch Quasilinearisierung des Rollwinkels $\varphi(y)$ und der äquivalente Kontaktwinkelparameter ε aus der Kontaktwinkeldifferenz $\delta(y)$ der Neigungswinkel im Berührungspunkt rechts und links bestimmt, können nach [Mauer88] die nichtlinearen Profilkonturen durch Kreisbogenprofile approximiert werden. Diese ermöglichen dann die vollständig linearisierte Beschreibung der Geometriefunktionen im Kontaktbereich von Rad und Schiene. Die drei Parameter $(\lambda_e, \sigma, \varepsilon)$ werden auch als ORE⁷-Parameter bezeichnet.

Stabilität und kritische Geschwindigkeit

Eine der wichtigsten Anwendungen der linearen Systemanalyse besteht in der Beurteilung der Stabilität der stationären Gleichgewichtslage und insbesondere bei Schienenfahrzeugen in der Berechnung der bereits in Abschnitt 2.1.5 kurz angesprochenen Stabilitätsgrenze, der kritischen Geschwindigkeit v_{krit} . Diese trennt den Geschwindigkeitsbereich des stationären Langzeitverhaltens von demjenigen des unerwünschten Schlingerlaufs.

⁷ORE – Office de Recherches et d’Essais des Europäischen Eisenbahnverbandes UIC, heute *European Rail Research Institute*, ERRI.

Die lokale Stabilität (im Sinne von LYAPUNOV) der stationären Lösung eines dynamischen Systems kann anhand der Lösung des Eigenwertproblems der linearen Systemgleichung (2.9) beurteilt werden. Asymptotische Stabilität ist nur dann gegeben, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} einen negativen Realteil haben,

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})) < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zur Berechnung der Grenzgeschwindigkeit v_{krit} kann die Eigenwertberechnung in eine Parametervariation mit variiertter Fahrgeschwindigkeit v eingebettet werden. Trägt man die Eigenwerte $\operatorname{Re}(\lambda_i^j)$ der Systemmatrizen $\mathbf{A}(v_j)$ für diskrete Geschwindigkeiten v_j in der komplexen Ebene als Wertepaare $(\operatorname{Re}(\lambda_i^j), \operatorname{Im}(\lambda_i^j))$ ein, erlaubt die resultierende *Wurzelortskurve* einen sehr guten Überblick über das geschwindigkeitsabhängige Systemverhalten. Die Wurzelortskurve für das hier verwendete Modell eines Reisezugwagens, berechnet für den Geschwindigkeitsbereich $v = [5.0 \text{ m/s}; 140.0 \text{ m/s}]$ und beschränkt auf die interessierende Umgebung der Stabilitätsgrenze, ist zur Verdeutlichung exemplarisch in Abb. 2.11 dargestellt. Die Eigenwerte werden dabei durch Kreuze symbolisiert, deren Größe mit der Fahrgeschwindigkeit zunimmt. Die Grenzgeschwindigkeit ist genau dann erreicht, wenn mindestens ein Eigenwert die Stabilitätsgrenze – die imaginären Achse – quert, $\operatorname{Re}(\lambda_i^j) = 0$: $v_{\text{krit}} \approx 100.2 \text{ m/s}$. Daneben werden Wurzelortskurven auch bei einer Variation der äquivalenten Konizität oder konstruktiver Parameter, z.B. der Steifigkeit der Primärfeder, erzeugt (\rightarrow kritische Parameter), [Rulka98].

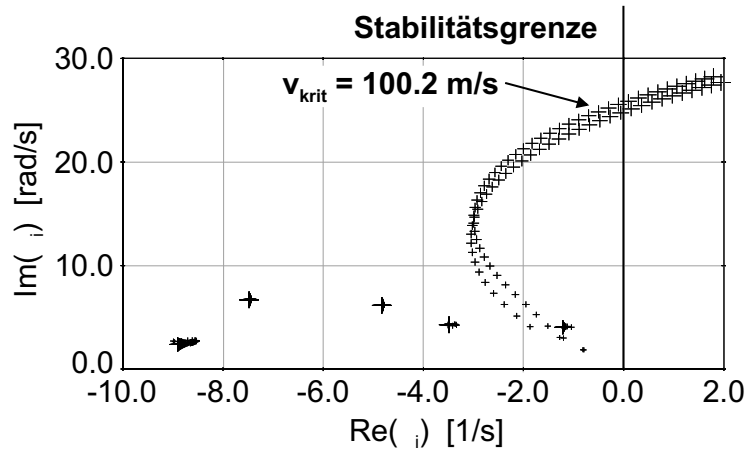


Abbildung 2.11: Wurzelortskurve für das Modell eines Reisezugwagens.

Störverhalten und Fahrkomfort

Das Störverhalten des linearen Systems (2.9) kann auf der Grundlage einer harmonischen oder aber einer stochastischen Erregung untersucht werden. Im realen Fahrzeug resultiert eine Erregung aus den unvermeidbaren Gleislagefehlern, diese werden üblicherweise in die vier unabhängigen Anteile einer Quer- und Vertikalstörung der Trasse bezüglich der idealen Gleismittellinie, einer Störung des Querneigungswinkels bezüglich der Trassenlängsrichtung sowie der Spurweite aufgeteilt. Reale Gleislagefehler sind in der Regel zufällig

und folglich als stochastischer Prozess zu beschreiben; aufgrund der guten Reproduzierbarkeit und Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird jedoch häufig auch auf eine harmonische Approximation der Störungen zurückgegriffen.

Die *Frequenzganguntersuchung* baut unter der Voraussetzung sinusförmiger Anregungen auf der LAPLACE-Transformation der linearen Zustandsgleichungen (2.9) in den Frequenzbereich auf. Betrachtet wird direkt das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems unter periodischer Erregung, wobei die Erregerfrequenz im interessierenden Frequenzbereich variiert wird. Man erhält dann sowohl den Amplituden- als auch den Phasenfrequenzgang des Systems, d.h. Amplitudenverstärkung und Phasenverschiebung gegenüber der Erregung.

Die Analyse der Fahrzeugreaktion auf reale, also stochastische Erregungen am linearisierten Modell kann sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich erfolgen. Erstere Methode wird auch als *Spektraldichteuntersuchung*, die zweite als *Kovarianzanalyse* bezeichnet. Beide Verfahren bauen auf der Interpretation der Gleislagefehler als stochastischer, stationärer Erregerprozess auf, charakterisiert durch die spektrale Leistungsdichte. Berechnet wird die spektrale Leistungsdichte des Lösungsprozesses, die dann als Grundlage einer Bewertung mittels der menschlichen Wahrnehmung simulierender Komfortfilter dient.

Die linearen Analyseverfahren lassen zwar schon eine weitgehende Beurteilung eines Fahrzeuges oder eines Fahrzeugentwurfes zu, sind in ihrer Aussagekraft letztendlich aber doch eingeschränkt. Die oben aufgeführten Verfahren haben die stationäre Gleichgewichtslage bei Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit sowie einen geraden Gleisverlauf zur Voraussetzung. Darüber hinausgehende Bedingungen können meist ebenso wie bestimmte Fahrzeugkonstruktionen nur mit nichtlinearen Analysemethoden untersucht werden.

2.2.2 Nichtlineare Systemanalyse

Fast alle Methoden der nichtlinearen Systemanalyse erfordern die Lösung nichtlinearer Differentialgleichungssysteme der Form (2.1), (2.2) per numerischer Integration. Neben dem Nachteil eines vergleichsweise hohen Rechenaufwandes bieten diese Verfahren aber auch eine ganze Reihe bedeutender Vorteile: Allein unter der Vorgabe der Problemformulierung als Differentialgleichungssystem sind diese universell einsetzbar, die direkte Verwendung der nichtlinearen Gleichungen vermeidet Näherungsfehler bereits in den ausgewerteten Modellgleichungen. Speziell im Hinblick auf Schienenfahrzeuge erfordern bestimmte Konstruktionskonzepte wie die Neigetechnik oder die Untersuchung von Entgleisungsvorgängen als Beispiel für besondere Simulationsaufgaben eine nichtlineare Betrachtung. Auch muss die Fahrgeschwindigkeit nicht notwendigerweise als konstant angenommen werden. Und nicht zuletzt bleibt neben speziell nichtlinearen Effekten (Hysterese etc.) noch die Gesamtheit nichtlinearer Bewegungszustände zu nennen: Periodisches, quasi-periodisches und chaotisches Verhalten. Hinweise zur numerischen Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen durch Zeitschrittintegration wurden bereits am Ende von Abschnitt 2.1.2 gegeben.

Berechnung von Grenzyklen

Eine wichtige Beurteilungsmethode im ideal geraden Gleis ist die Grenzyklus-Berechnung, die das Verhalten des nichtlinearen Fahrzeugsystems im Schlingerlauf wieder-

gibt. Um dem Einzugsbereich der stationären Lösung zu entkommen, muss dazu das Modell mit einer entsprechenden Anfangsstörung angeregt werden. Ein Grenzzzyklus ist erst nach Abklingen aller Übergangsvorgänge erreicht. Es stellt sich somit das Problem, die Simulationszeit entsprechend größer als die a priori unbekannte Einschwingzeit zu wählen. Und letztere hängt stark von der Systemdämpfung sowie dem Anfangszustand ab. Bei schwacher Dämpfung ist das eigentliche Ende der Einschwingphase schwer bestimmbar; der Anfangszustand erfordert eine sorgfältige Auswahl, am besten in der Nähe der erwarteten periodischen Lösung. Wie in Abschnitt 3.2.1 noch weiter ausgeführt werden wird, kann es sogar vorkommen – insbesondere in der Nähe von Verzweigungspunkten, Näheres hierzu in Abschnitt 3.2.4 – dass ein Grenzzzyklus allein mit Hilfe der hier verwendeten Zeitintegration nicht zu ermitteln ist.

Betrachtet wird ein Grenzzzyklus beispielsweise anhand der Querauslenkung y und des Anlaufwinkels ψ von Wagenkasten, Drehgestellrahmen und Radsätzen sowie anhand der Querkräfte zwischen Rad und Schiene. Abb. 2.10 auf S. 26 zeigt für das Reisezugwagenmodell neben dem Grenzzzyklus selbst auch ein ausgeprägtes Übergangsverhalten des Modells an. Wird die Grenzzzyklus-Berechnung in eine Parametervariation der Fahrgeschwindigkeit oder anderer Systemparameter eingebettet, kann eine Darstellung ähnlich einem Verzweigungsdiagramm (siehe Abschnitt 3.1) generiert werden.

Störgrößenverhalten und Fahrkomfort

Die Analyse des Störgrößenverhaltens des nichtlinearen Modells im geraden Gleis dient ebenso wie im linearen Fall der Beurteilung des Fahrkomforts. Die stochastische Systemanregung kann dabei direkt über gemessene Gleislagefehler, nach einer eventuell notwendigen Filterung, oder mittels der im linearen Fall bereits erwähnten Leistungsdichtespektren erfolgen. Betrachtet werden auch hier Quer- und Vertikalstörungen sowie die Störung des Querneigewinkels der Trasse und deren Spurweitenfehler. Abgesehen von letzteren können die Störungen auch getrennt für die rechte und linke Einzelschiene definiert sein, die Umrechnung von Trassen- zu Schienenanregung und umgekehrt wird in [Mauer88] beschrieben. Wichtige Bewertungsgrößen sind hierbei die auf den Fahrgast wirkenden Beschleunigungen zur Komfortbetrachtung sowie die zwischen den Radsätzen und dem Gleis wirkenden Summenkräfte. Im Rahmen einer Komfortbewertung werden im Anschluss an die Integration noch Streuung und Varianz der interessierenden Ausgangsgrößen bestimmt und/oder die menschliche Wahrnehmung simulierende Komfortfilter eingesetzt.

Die Reaktion des hier behandelten Reisezugwagens bei Fahrt mit konstanter Fahrgeschwindigkeit $v = 25 \text{ m/s}$ über eine gerade Trasse und unter Anregung durch spezifische, gemessene Gleislagefehler ist anhand der Vertikalbeschleunigung \ddot{z} des Wagenkastenschwerpunktes in Abb. 2.12 dargestellt. Für die rechte und die linke Schiene sind dabei je laterale und vertikale Störungen des idealen Schienenverlaufs berücksichtigt.

Kurvenverhalten und beliebige Trassierungen

Neben der bisher stets betrachteten Fahrt im geraden Gleis muss bei einer Fahrzeugauslegung aber auch das Verhalten bei Kurvenfahrten untersucht und bewertet werden.

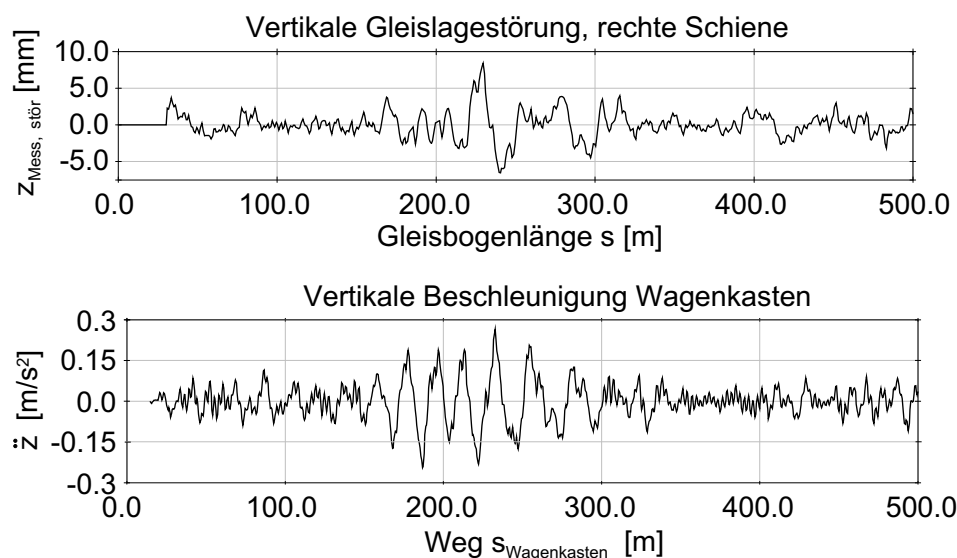


Abbildung 2.12: Reaktion des Reisezugwagens auf einen gemessenen Gleislagefehler. Gezeigt ist die resultierende Vertikalbeschleunigung des Wagenkastens \ddot{z} sowie repräsentativ die rechte vertikale Schienenanregung.

Die wichtigsten Fragestellungen bei Kurvenfahrtsimulationen betreffen die Entgleisungsicherheit, die Beanspruchung des Oberbaus, das Potential der Erhöhung der freien Seitenbeschleunigung in der Gleisebene (Neigetechnik!) sowie die Reduktion des Verschleißes von Rad und Schiene. Als Beurteilungsgrößen werden im Wesentlichen die Kräfte zwischen Rad und Schiene und zwischen Radsatz und Gleis (und damit zwischen Gleis und Oberbau) sowie die Querbeschleunigung des Wagenkastens herangezogen.

Abgesehen von Grenzwerten für die einzelnen Kräfte zwischen Rad und Schiene sind in der [DIN 5550] eine Reihe weiterer Grenzkriterien festgelegt, von denen hier nur der minimale Gleisverschiebewiderstand nach PRUD'HOMME angeführt werden soll. Dieses Kriterium begrenzt die zulässige Gesamtquerkraft eines Radsatzes auf das Gleis zu

$$|\Sigma Y| \leq \kappa \cdot \left(10 + \frac{2Q}{3}\right) \quad (= \Sigma Y_{\text{Pdh}}) \quad [\text{kN}] . \quad (2.10)$$

Die Summe der zwischen Radsatz und Gleis wirkenden Querkräfte ΣY ist darin genauso wie die nominale Vertikalkraft Q zwischen *einem* Rad und der Schiene in [kN] anzugeben; der Faktor κ ist fahrzeugtypspezifisch (z.B. $\kappa = 1.0$ für Reisezug- und Personentriebwagen). Der Grenzwert soll gewährleisten, dass aufgrund der Führungskräfte ΣY keine bleibenden Verschiebungen des Gleisrostes im Schotterbett entstehen.

Neben der reinen Bogenfahrt werden auch Fahrten auf allen anderen, in der Realität vorkommenden Trassierungstypen wie Parallelverziehungen, Gleisverwindungen, Kurvenein- und Kurvenausfahrten usw. simuliert. Bewertet werden u.a. neben den Einzelkräften zwischen Rädern und Schienen und den Radsatzsummenkräften (z.B. Kriterium (2.10)) die resultierenden Vertikal- und Horizontalbeschleunigungen des Wagenkastens (und damit von Passagieren oder Transportgut) sowie der Querversatz von Rädern, Drehgestellen und Wagenkasten. Beispielhaft seien die so genannten Schiebeversuche genannt,

[SchuppSchroederJaschinskiRöbke98], die zur Bewertung von Güterwagen bezüglich der Entgleisungssicherheit bei langsamer Fahrt durch eine verwundene Gleisverziehung durchgeführt werden. Sollen Simulationsergebnisse anhand von Messungen an realen Fahrzeugen verifiziert werden, ist die Berücksichtigung der gemessenen Gleislage sowie gemessener Gleislagefehler unumgänglich.

Als weiteres Beispiel ist in Abb. 2.13 das Ergebnis einer Simulation der Fahrt des Reisezugwagens mit $v = 60 \text{ km/h}$ durch eine s-förmige Gleisverziehung als einfache Nachbildung einer Weichendurchfahrt aufgeführt. Die Trassierung kann anhand des Verlaufs der Horizontalkrümmung $1/R_H$ der Gleismittellinie bezüglich deren Bogenlänge nachvollzogen werden. Als repräsentatives Ergebnis ist die Seitenführungskraft ΣY_{RS1} des führenden Radsatzes über dem zurückgelegten Fahrweg dargestellt; der Grenzwert nach PRUD'HOMME gemäß (2.10), $\Sigma Y_{Pdh} = 46.4 \text{ kN}$, wird nicht erreicht.

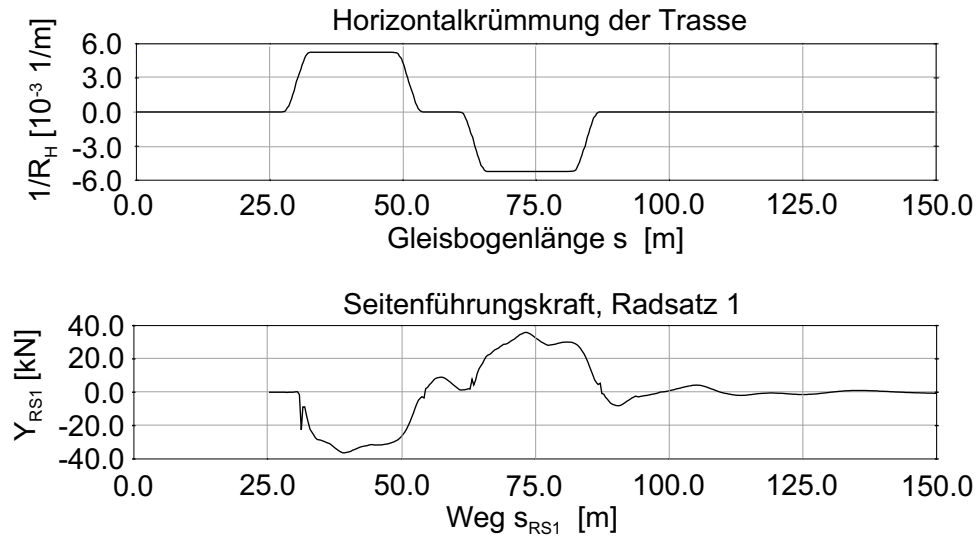


Abbildung 2.13: Durchfahrt des Reisezugwagens durch eine s-förmige Gleisverziehung: Horizontalkrümmung $1/R_H$ der Trasse und Seitenführungskraft ΣY_{RS1} zwischen führendem Radsatz und Gleis.

Quasistationäre Bogenfahrt

Das Verfahren der quasistationären Bogenfahrt nimmt innerhalb des vorgestellten Unterteilungsschemas eine gewisse Sonderstellung ein und ist eigentlich am ehesten der Berechnung der stationären Gleichgewichtslage durch Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_s, t)$ vergleichbar. Das grundlegende Szenario ist die Fahrt eines Schienenfahrzeuges mit konstanter Geschwindigkeit v durch einen Bogen mit konstantem Kurvenradius R und konstanter Überhöhung u . Diese Parameter legen die freie oder unausgeglichene Seitenbeschleunigung $a_q = a_q(v, R, u, e_0)$ fest, die als beschreibende Kenngröße dieses Verfahrens verwendet wird. Neben den Bestimmungsparametern u und e_0 (Abstand der Schienenköpfe) wird dabei normalerweise die Seitenbeschleunigung a_q ebenfalls als Parameter vorgegeben, berechnet wird daraus dann der Kurvenradius R oder die

Fahrgeschwindigkeit v , es gilt der Zusammenhang (g – Erdbeschleunigung)

$$v = \sqrt{R / \cos \alpha \cdot (a_q + g \sin \alpha)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sin \frac{u}{e_0} .$$

Zur Fahrzeugbeurteilung werden normalerweise die Querverschiebungen der Radsätze bezüglich der Gleismittellinie sowie die Radsatzführungskräfte ΣY verwendet, zu prüfen sind dabei letztere gegen den Grenzwert (2.10).

Ein weiteres Berechnungsverfahren ist in der *Verzweigungsanalyse* zu sehen, der Generierung so genannter Verzweigungsdiagramme also in Kombination mit einer Stabilitätsbeurteilung der gefundenen Lösungen. Der Schwerpunkt des folgenden Kapitels liegt auf der Beschreibung solcher Verzweigungsdiagramme sowie deren rechnergestützter numerischer Erzeugung.

Kapitel 3

Theorie und Berechnung von Verzweigungsdiagrammen

Die Spannweite der beobachteten und rechnerisch analysierten Phänomene *nichtlinearer dynamischer Systeme* reicht von der stationären Gleichgewichtslage über periodisches und quasi-periodisches Verhalten bis hin zum Chaos. Zu deren Untersuchung stehen sowohl analytische als auch numerische Verfahren zur Verfügung. Zwar sind die Ergebnisse numerischer Methoden nur innerhalb gewisser Fehlerschranken gültig (Abbruchfehler, Rundungsfehler, . . .), werden jedoch starke Vereinfachungen vermieden, sind größere, komplexe Systeme fast ausschließlich einer numerischen Analyse zugänglich. Dennoch wird aus Gründen der rechnerischen Effizienz oftmals versucht, die Systemkomplexität so weit als möglich zu reduzieren ohne dabei das Systemverhalten allzu sehr zu beeinträchtigen. Die Mehrzahl der Verfahren wird also fast immer nur auf relativ kleine Gleichungssysteme angewandt, eines der am besten untersuchten dürfte z.B. die DUFFING-Gleichung sein:

$$\ddot{y} + a \dot{y} + b y + c y^3 = d \cos \omega t . \quad (3.1)$$

Eine Ausnahme bilden diejenigen Systeme partieller Differentialgleichungen, die auf der Grundlage einer (räumlichen) Diskretisierung in ein großes System gewöhnlicher Differentialgleichungen transformiert werden können. Gerade im Hinblick auf die dabei entstehenden großen Gleichungssysteme wurden in letzter Zeit einige anerkannte Verfahren modifiziert bzw. neue Verfahren entwickelt, [LustRooseSpenceChampneys98, LustRoose98]. Die Handhabung komplexer Systeme, wie sie bei der „vollständigen“ Modellierung von Schienenfahrzeugen entstehen, kann also durchaus als unüblich angesehen werden. Die ausgiebige Anwendung der Methoden der nichtlinearen Systemanalyse auf Modelle von Rad-Schiene-Systemen ist von TRUE et al. in einer großen Anzahl von Arbeiten dokumentiert, exemplarisch sei hier nur auf [True92, TrueJensen94, IsaksenTrue97, JensenTrue97, SlivsgaardTrue97] verwiesen.

Nichtlineare Systeme (2.3) unterscheiden sich in ihrem Verhalten erheblich von linearen Systemen (2.9), eine anschauliche Gegenüberstellung ist in [True99] zu finden. Beispielsweise gilt für nichtlineare Systeme das Superpositionsprinzip nicht und deren Lösungen können hochgradig von den Anfangsbedingungen abhängen. Letztgenannte Eigenschaft kann sich auf verschiedene Art und Weise äußern: Die Frequenz nichtlinearer Schwin-

gungen kann von deren Amplitude abhängen oder es kann sich völlig unterschiedliches Systemverhalten im eingeschwungenen Zustand einstellen. Im Falle chaotischer Systeme können kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen zu extrem divergenten Lösungen führen (der „Schmetterlingseffekt“).

Die Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme werden in einer ganzen Reihe von Lehrbüchern beschrieben, von denen hier nur eine kleine, im Zusammenhang mit dieser Arbeit relevante Auswahl aufgeführt ist. Eine ausführliche Beschreibung der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme sowie ein umfassender Überblick über die Verfahren zu deren Untersuchung werden in [GuckenheimerHolmes96] und [Wiggins90] gegeben. Eine sehr gute Übersicht über die große Menge nichtlinearer Phänomene ist in [ThompsonStewart86] zu finden. Im Hinblick auf die Implementierung neuer oder die Modifikation bestehender Verfahren ist jedoch ein mehr verfahrensorientierter Ansatz hilfreich. Einen solchen verfolgen [Seydel94] und [ParkerChua89], wobei in ersterem numerische Aspekte im Vordergrund stehen, in letzterem dagegen die Darstellung hinunter bis auf Algorithmusebene reicht. Ebenso werden in [NayfehBalachandran95] analytische, numerische und experimentelle Verfahren vorgestellt; auf die drei letztgenannten stützen sich im Wesentlichen die Ausführungen in diesem Kapitel.

Die Duffing-Gleichung (3.1) deutet eine weitere, herausragende Eigenschaft nichtlinearer Systeme bereits an: Die Abhängigkeit des sowohl quantitativen als auch des qualitativen Systemverhaltens von einem oder mehreren Systemparametern. Die *Verzweigungsanalyse* stellt ein probates numerisches Verfahren zur Untersuchung dieser Abhängigkeiten dar. Als Resultat erhält man so genannte *Verzweigungsdiagramme*, die in übersichtlicher Form das Systemverhalten bei der Variation eines oder mehrerer Parameter wiedergeben; ein Beispiel eines Verzweigungsdiagramms aus dem Bereich der Schienenfahrzeugdynamik ist in Abb. 3.2 auf S. 43 vorgestellt. Eine kurze Einführung in solche Verzweigungsdiagramme sowie in deren computergestützte Generierung, speziell im Hinblick auf eine Anwendung auf Modelle von Schienenfahrzeugen, sind der Inhalt dieses Kapitels. Zum Abschluss wird die Verzweigungsanalyse dann in die im vorigen Kapitel zusammengefassten Methoden zur Laufdynamiksimulation von Schienenfahrzeugen eingegliedert.

3.1 Verzweigungsdiagramme dynamischer Systeme

Verzweigungsdiagramme repräsentieren den Zustands-Parameter-Raum eines dynamischen Systems in einer kompakten Form. Abhängig von der Anzahl n_π der variierten Parameter p_i können unterschiedliche Phänomene auftreten, allerdings setzen die meisten Verfahren einen niedrigdimensionalen Parameterraum $n_\pi = 1$ oder $n_\pi = 2$ voraus. Hier und im Weiteren sollen nur einparametrische Systeme betrachtet werden. Das Prinzip der Verzweigungsdiagramme wird zunächst für allgemeine dynamische Systeme skizziert. Bei deren Anwendung auf Rad-Schiene-Systeme kann ein stets wiederkehrendes, charakteristisches Muster festgestellt werden, das dann im Anschluss vorgestellt wird.

3.1.1 Definition wichtiger Begriffe

Aus Gründen der Einfachheit und Übersichtlichkeit, wie auch dem größten Teil der Literatur folgend, wird zunächst von einer expliziten Formulierung der beschreibenden Glei-

chungen als einparametriges, autonomes System gewöhnlicher Differentialgleichungen ausgegangen, vgl. (2.1):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, p), \quad \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Im Folgenden sei stets vorausgesetzt, dass die Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{y}, p)$ ausreichend oft bezüglich \mathbf{y} und dem Systemparameter p stetig differenzierbar ist, daneben sei auch noch das aus (3.2) und der Anfangsbedingung $\mathbf{y}(t = 0) = \mathbf{y}_0$ gebildete grundlegende Anfangswertproblem eindeutig lösbar. Die Erweiterung ausgewählter Methoden auf die differentiell–algebraische Formulierung (2.2)/(2.3) wird in Kapitel 5 detailliert behandelt.

Verzweigungsdiagramme stellen das (asymptotische) dynamische Verhalten eines durch (3.2) beschriebenen Systems in Abhängigkeit von einem Systemparameter p übersichtlich und kompakt als zweidimensionale Grafik dar. Betrachtet wird das Systemverhalten nach dem vollständigen Abklingen aller Übergangsvorgänge, im eingeschwungenen Zustand also für $t \rightarrow \infty$. Dabei wird eine Lösung der Systemgleichungen bei einer diskreten Variation des Parameters p durch einen Lösungspunkt im $(n+1)$ –dimensionalen Zustands–Parameter–Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ allein mit einer einzigen, möglichst aussagekräftigen, parameterabhängigen und skalaren Kenngröße $k = k(p)$ charakterisiert. Im Falle von Rad–Schiene–Systemen erweist sich hierzu z.B. häufig die maximale Querauslenkung eines Radsatzes bezüglich der Gleismittellinie als geeignet, $k(p) := \max_t y_{\text{RS}}(t, p)$, siehe dazu auch Abschnitt 2.1.5 und vor allem Abb. 2.8–2.10.

Im eingeschwungenen Zustand ($t \rightarrow \infty$) kann das dynamische System (3.2) eines von vier grundlegenden Arten von Lösungsverhalten zeigen: Unterschieden werden stationäre Gleichgewichtslösungen¹, periodische (auch mehrfach–periodische), quasi–periodische und chaotische Lösungen. Dem zeitbasierten Konzept des eingeschwungenen Zustandes ist bei einer Betrachtung im Zustandsraum \mathbb{R}^n das umfassendere und nützlichere Konzept der *Grenzmenge* äquivalent, [ParkerChua89]. Eine Grenzmenge ist folglich die Menge aller Lösungspunkte $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ von (3.2) für $t \rightarrow \infty$; dieses Konzept gilt analog auch bei umgekehrtem Zeitpfeil $t \rightarrow -\infty$. Die einer stationären Lösung entsprechende Grenzmenge wird auch als Gleichgewichts– oder Fixpunkt bezeichnet; weitere Grenzmengen sind der Grenzzyklus, der Torus und der chaotische Attraktor (korrespondierend periodischem, quasi–periodischem und chaotischem Verhalten).

Die Grenzmenge \mathcal{L} ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn eine offene Umgebung \mathcal{V} von \mathcal{L} existiert, so dass jeder Punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ für $t \rightarrow \infty$ \mathcal{L} als Grenzmenge besitzt. Vereinfacht ausgedrückt müssen also alle Trajektorien, die in einer Umgebung von \mathcal{L} starten, auch von \mathcal{L} „angezogen“ („attracted“) werden. Unter gewissen, weiter einschränkenden Voraussetzungen wird eine solche Grenzmenge dann auch als *Attraktor* bezeichnet. Gilt diese Definition nur bei umgedrehtem Zeitpfeil $t \rightarrow -\infty$, ist die Grenzmenge *instabil*. Für darüber hinausgehende Stabilitätsdefinitionen sei auf die Monographien zur nichtlinearen Systemdynamik wie [ParkerChua89, GuckenheimerHolmes96] verwiesen. In einem Verzweigungsdiagramm können alle vier Typen von Grenzmengen inklusive einer Stabilitätsbewertung dargestellt werden; letzteres aber nur für stationäres und periodisches Verhalten.

¹Definiert durch $\mathbf{f}(\mathbf{y}_s, p) = \mathbf{0}$ werden solche Lösungen in der Literatur u.a. auch als Fixpunkte, Gleichgewichtspunkte, stationäre Punkte etc. bezeichnet. Aus Gründen einer einfachen Schreibweise und zur einfachen Abgrenzung gegen periodische Lösungen wird hier und im Folgenden gemäss der Nomenklatur in [Seydel94] in diesem Fall die Bezeichnung stationäre (Gleichgewichts–) Lösung gewählt.

Eine häufig auftretende Erscheinung bei der Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme besteht in der *Koexistenz* auch qualitativ unterschiedlicher Lösungen im eingeschwungenen Zustand (d.h. unterschiedlicher Attraktoren bzw. Grenzmengen) bei gleichem Parameterwert. Welchen Attraktor der Systemzustand letztlich ($t \rightarrow \infty$) erreicht, hängt dabei *allein* vom Anfangszustand $\mathbf{y}(t=0) = \mathbf{y}_0$ ab. Beispielsweise können neben einer stationären Lösung (d.h. einem stationären Attraktor, also einem Fixpunkt) eine instabil periodische, eine stabil periodische (Grenzzyklen) und eine chaotische Lösung (chaotischer Attraktor) auftreten – also koexistieren. Im Zuge einer anschaulichen Präsentation koexistierender Lösungen wird häufig auf Verzweigungsdiagramme zurückgegriffen, das Phänomen der Koexistenz tritt beispielsweise auch in Abb. 3.2 auf S. 43 auf.

Eine kleine Änderung (Störung) des Systemparameters p bewirkt in den meisten Fällen eine ebenfalls kleine, quantitative Änderung der Grenzmenge (des Attraktors) in Lage, Form und/oder Größe, jeweils bezüglich des Zustandsraumes. Resultiert aus einer kleinen Änderung des Parameters p allerdings eine qualitative Änderung der Grenzmenge, dann ist eine *Verzweigung* gefunden. Ein Beispiel einer Verzweigung ist der plötzliche Übergang einer vormals stationären Lösung auf eine periodische Lösung. Der entsprechende Punkt im Zustands-Parameter-Raum wird als *Verzweigungspunkt* bezeichnet. Im Verzweigungsdiagramm wird ein solcher normalerweise gesondert hervorgehoben, etwa durch Angabe des Parameterwertes selbst oder eines möglichst engen Parameterbereichs.

Ein *(Lösungs)Ast* („branch“) ist eine eindimensionale Raumkurve im Zustands-Parameter-Raum \mathbb{R}^{n+1} , gebildet aus einem Kontinuum von Lösungen der Systemgleichungen (3.2) bzw. von jeweils einem Lösungspunkt als Element einer zugehörigen Grenzmenge. Übertragen auf ein Verzweigungsdiagramm stellt ein Lösungsast den angenähert kontinuierlichen Verlauf der stationäre oder periodische Lösungen charakterisierenden, diskret berechneten Kenngröße $k(p)$ dar. Mehrfach-periodische Lösungen sind durch mehrere Äste charakterisiert (nicht zu verwechseln mit koexistierenden Lösungsästen). Im Allgemeinen werden (asymptotisch) stabile Lösungen mit durchgezogenen Linien, instabile Lösungen mit gestrichelten Linien gekennzeichnet. Quasi-periodisches und chaotisches Verhalten erscheint in einem Verzweigungsdiagramm nicht mehr als einfache Kurve, sondern als aus vielen Punkten bestehender, verwischt erscheinender Bereich. Eine Unterscheidung in stationäres und periodisches Verhalten ist genauso wie die Unterscheidung in quasi-periodisches und chaotisches Verhalten allein anhand des Verzweigungsdiagramms normalerweise nicht möglich, sondern muss explizit angegeben werden. Zur weiteren Veranschaulichung und weiteren Erläuterungen sei auf Abb. 3.2 auf S. 43 sowie auf die unterschiedlichsten umfassenden Verzweigungsdiagramme bereits relativ einfacher Systeme wie der Duffing-Gleichung (3.1) in der entsprechenden Literatur verwiesen, z.B. [ThompsonStewart86, ParkerChua89].

3.1.2 Verzweigungsdiagramme von Schienenfahrzeugen

Das besondere Merkmal von Rad-Schiene-Systemen besteht in der Spurführung profilierter Räder auf profilierten Schienen, wodurch sich unabhängig vom restlichen Fahrzeug stets eine qualitativ ähnliche, charakteristische Dynamik herausbildet (siehe dazu auch Abschnitt 2.1.5). Diese wiederum resultiert in einem charakteristischen Aufbau der Ver-

zweigungsdiagramme, skizziert in Abb. 3.1. Hier wie im Folgenden ist, falls nicht anders erwähnt, als unabhängiger Systemparameter p die Fahrgeschwindigkeit v des Fahrzeuges gewählt. Das Bewegungsverhalten des Fahrzeuges wird oft durch die Querauslenkung y eines Radsatzes, eines Drehgestells und/oder des Wagenkastens gegenüber der Gleismittellinie im *eingeschwungenen* Zustand repräsentiert. Die stationäre Lösung ist dann durch einen konstanten, meist verschwindenden Kennwert $k(v)$ charakterisiert; im Falle der periodischen Lösung wird das Maximum über eine Periode T_P gebildet (t_0 sei ein beliebiger Zeitpunkt, zu dem sich das System bereits im eingeschwungenen Zustand befindet),

$$k(p) = k(v) := y_{\max} = \max_{t \in [t_0; t_0 + T_P]} y(t) .$$

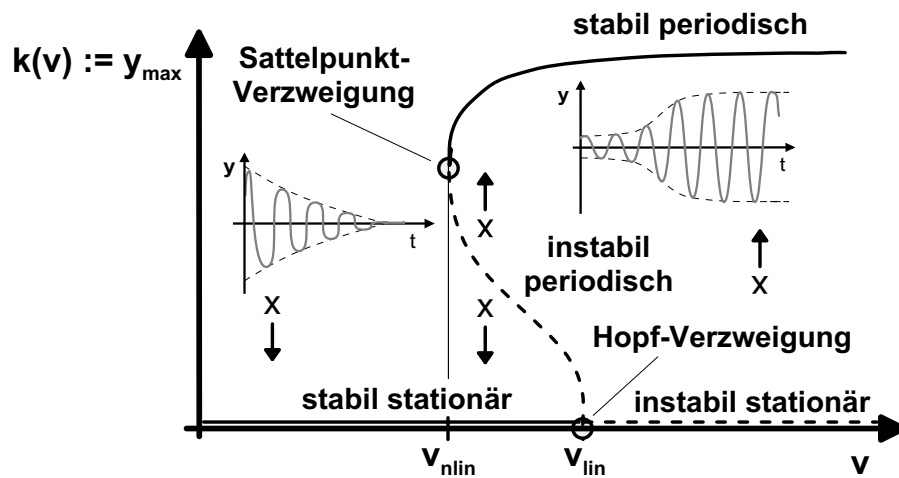


Abbildung 3.1: Prinzipskizze eines Verzweigungsdiagramms für Schienenfahrzeuge (im stationären Fall gilt formal $y_{\max} \equiv y = \text{konst.}$).

Beginnt man die Verfolgung der Lösungen der Bewegungsgleichungen im Zustands-Parameter-Raum bei sehr kleinen und in Richtung aufsteigender Geschwindigkeiten, stellt sich zunächst stabil stationäres Verhalten ein. Entsprechend beschränkte, in der Realität unvermeidbare Störungen klingen stets mehr oder weniger schnell ab. Nach Überschreiten der *linearen Grenzgeschwindigkeit* v_{lin} , bei der eine *unterkritische Hopfverzweigung*² vorliegt, wird diese Bewegung jedoch instabil und bereits kleine Störungen führen das System in einen Grenzzyklus. Gleichzeitig zweigt ein nur rechnerisch bestimmbarer, instabil periodischer Lösungsast ab. Verfolgt man diesen in Richtung jetzt fallender Geschwindigkeiten, wird die Lösung bei der *nichtlinearen Grenzgeschwindigkeit* v_{nlin} wieder stabil, es tritt eine *Sattelpunktverzweigung* auf. Das stabil periodische Verhalten, der bereits in Abschnitt 2.1.5 beschriebene Schlingerlauf (die Fahrt in einem Grenzzyklus also; bei ausgeprägtem Flankenkontakt durch hartes Anlaufen der Räder an den Schienen auch als Zickzacklauf bezeichnet), bleibt dann in Richtung wieder steigender Fahrgeschwindig-

²Die Unterscheidung zwischen unter- und überkritischen Verzweigungen ist in der Literatur nicht immer eindeutig, die hier verwendete Bezeichnungsweise folgt [Seydel94]. Auf die unterschiedlichen Arten von Verzweigungen wird in Abschnitt 3.2.4 näher eingegangen.

keiten erhalten. Mit weiter steigenden Geschwindigkeiten wächst die Gefahr einer Entgleisung des Fahrzeuges stark an, eine allzu weite Verfolgung dieses Lösungsastes ist unter ingenieurmäßigen Gesichtspunkten im Normalfall von untergeordneter Bedeutung.

Bei der Interpretation eines solchen Verzweigungsdiagramms ist der Geschwindigkeitsbereich $[v_{\text{nlin}}, v_{\text{lin}}]$ zwischen den beiden Grenzggeschwindigkeiten von entscheidender Bedeutung. Hier koexistieren die stabil stationäre, die instabil periodische sowie die stabil periodische Lösung, wobei die instabile am realen Fahrzeug nicht beobachtbar ist. Der instabil periodische Lösungsast trennt als Separatrix die Einzugsbereiche der beiden stabilen Lösungen voneinander, es tritt ein so genanntes bi-stabiles Verhalten auf. Ein solches Verzweigungsszenario wird auch als „harter Stabilitätsverlust“ ([Seydel94]) bezeichnet. Da das sich im eingeschwungenen Zustand in diesem Bereich letztlich einstellende Lösungsverhalten allein von den Anfangsbedingungen bestimmt wird, ist die daraus resultierende Problematik für die Fahrzeugdynamik deutlich erkennbar: Aufgrund der stets vorhandenen Gleislagefehler kann das System in den Einzugsbereich des Grenzzyklus gelangen, der doch eigentlich auf jeden Fall vermieden werden muss. Beachtet man, dass die mit Hilfe der in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten linearen Analysemethoden bestimmte kritische Geschwindigkeit v_{krit} der linearen Grenzggeschwindigkeit entspricht, bedeutet das aber, dass als Auslegungskriterium eigentlich die *nichtlineare Grenzggeschwindigkeit* zur Anwendung kommen muss, $v_{\text{krit}} := v_{\text{nlin}}$! Und diese ist rechnerisch wesentlich schwieriger bestimmbar als die lineare Grenzggeschwindigkeit.

Das vorgestellte prinzipielle Verzweigungsverhalten von Rad-Schiene-Systemen wird in einer Reihe von Arbeiten aufgrund entsprechender Berechnungen konstatiert, u.a. in [Kaas-Petersen86, TrueJensen94, XuSteindlTroger92]. Dabei findet jedoch meist eine Beschränkung auf Simulationsmodelle von Drehgestellen ausgerüstet mit einem oder zwei Radsätzen statt, untersucht werden also lediglich relativ kleine Subsysteme. Eine diesbezügliche Literaturübersicht ist bereits in Abschnitt 1.2 zusammengestellt. Einige Autoren wie [Kaas-Petersen86, TrueJensen94, Slivsgaard95, IsaksenTrue97] gehen über den Bereich der periodischen Lösung hinaus. Als Beispiel sei auf die sehr ausführliche Verzweigungsanalyse eines Einzelradsatz-Drehgestells mit kegeligen Radprofilen auf kreiszylindrischen Schienen in [KnudsenFeldbergJaschinski91] hingewiesen, ein Ausschnitt des dort vorgestellten Verzweigungsdiagramms ist in Abb. 3.2 wiedergegeben. Diese Untersuchung baut auf der Fahrgeschwindigkeit v als Verzweigungsparameter auf, das dynamische Verhalten wird durch die Rotationsbewegung ψ des Radsatzes um die vertikale Achse (gieren) repräsentiert. Neben ein- und mehrfach periodischem Verhalten werden dort ausgeprägte Parameterbereiche mit quasi-periodischem oder chaotischem Verhalten festgestellt. Innerhalb des quasi-periodischen Bereichs werden so genannte „Fenster“ gefunden, relativ schmale Parameterbereiche, in denen das quasi-periodische Verhalten durch teilweise mehrere koexistierende, ein- oder mehrfach periodische Lösungsäste kurzfristig abgelöst wird. Ausgehend jeweils von einer stabilen periodischen Lösung weist das Verzweigungsdiagramm daneben auch noch Serien von Periodenverdopplungen bis hin zu chaotischem Verhalten auf (*Feigenbaum-Kaskaden*). All diese Phänomene werden häufig auch bei anderen, wesentlich einfacheren nichtlinearen dynamischen Systemen beobachtet und in der entsprechenden Literatur wie [ParkerChua89] und [ThompsonStewart86] ausführlich diskutiert.

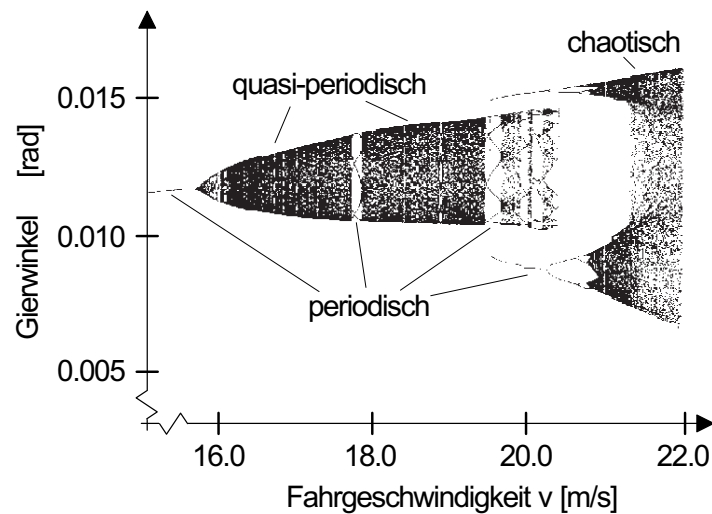


Abbildung 3.2: Ausschnitt aus dem Verzweigungsdiagramm eines einzelnen Radsatzes mit kegeligen Rad- auf kreisförmigen Schienenprofilen. Auf der Ordinate sind die lokalen Maxima der Gierbewegung $\psi(t)$ des Radsatzes (Rotation um die vertikale Achse) aufgetragen. Aus [KnudsenFeldbergJaschinski91], mit freundlicher Genehmigung von A. JASCHINSKI.

In Bezug auf technisch-industrielle Anwendungen erscheint die in dieser Arbeit wie auch in [GalvanettoBriseghellaBishop97] verfolgte Beschränkung auf den Bereich des stationären und des periodischen Verhaltens jedoch als ausreichend. In den nachfolgenden Ausführungen zur Berechnung von Verzweigungsdiagrammen werden deswegen nur stabil und instabil stationäre sowie stabil und instabil periodische Lösungsäste betrachtet.

3.2 Verzweigungsanalyse: Berechnung von Verzweigungsdiagrammen

Die Grundaufgabe bei der Berechnung von Verzweigungsdiagrammen besteht darin, für einen bestimmten, genügend fein diskretisierten Parameterbereich die (im Idealfall: alle) Attraktoren bzw. Grenzmengen – hier also die stationären und/oder periodischen Lösungen der Systemgleichungen – zu bestimmen und auf abrupte Änderungen im Systemverhalten hinzuweisen. Man unterscheidet im Wesentlichen zwei Prinzipien. Einen nahe liegenden, sehr einfach umzusetzenden Ansatz stellt die Methode der Parametervariation über numerische Integrationen dar, im englischen Sprachraum anschaulich auch als „Brute-Force-Approach“ („rohe Gewalt“) bezeichnet. Der direkte Ansatz der *Pfadverfolgung* oder *Fortsetzung* hingegen ist zwar umfassender automatisierbar und effizienter, hat aber den Nachteil, dass damit chaotisches Verhalten nicht analysierbar ist. Selbst quasi-periodisches Verhalten wird nur selten mit einer Pfadverfolgung untersucht, mögliche Ansätze sind in [Kaas-Petersen87, ParkerChua89] beschrieben. Nach einer Skizzierung der Parametervariation zur Verzweigungsanalyse liegt der Schwerpunkt des Abschnitts auf den Verfahren der Pfadverfolgung und der darauf aufbauenden Stabilitätsanalyse der Lösungen sowie der Lokalisierung und Klassifizierung von Verzweigungspunkten.

In der Literatur zur Verzweigungsanalyse von Rad-Schiene-Systemen überwiegt der Einsatz der Parametervariation, z.B. [Jaschinski90, XuSteindlTroger92, TrueJensen94, Slivsgaard95, AhmadianYang98, Stichel01]. Pfadverfolgungsmethoden für stationäre und periodische Lösungen wenden [Kaas-Petersen86, KnudsenFeldbergJaschinski91, IsaksenTrue97] (mit dem Programmsystem PATH), [Hassard00] (BIFPACK) und [Meijaard91, Franke98] an.

Die relativ häufige Anwendung von PATH zur Verzweigungsanalyse von Rad-Schiene-Systemen, wenn auch unter der Voraussetzung einer mehr oder weniger starken Modellreduktion und -vereinfachung, ist mit einer der Gründe für dessen Auswahl als Basissoftware zur Verzweigungsanalyse im Rahmen dieser Arbeit. PATH kann zur Pfadverfolgung von Systemen autonomer oder periodisch erregter gewöhnlicher Differentialgleichungen in der expliziten Formulierung (3.2) eingesetzt werden, [Kaas-Petersen85, Kaas-Petersen89]. Ausgehend von einer vorzugebenden, ausreichend guten Anfangsschätzung berechnet PATH sowohl stationäre als auch periodische Lösungen und setzt diese bezüglich eines Systemparameters im Zustands-Parameter-Raum fort. Eine Stabilitätsanalyse wird online mit der Fortsetzung durchgeführt, Verzweigungspunkte werden mit vorgebbare Genauigkeit lokalisiert. Anwendungen in einem zweidimensionalen Parameterraum sind ebenfalls möglich. Die in PATH bisher implementierten wichtigsten Algorithmen werden an geeigneter Stelle im Folgenden auf der Grundlage von [Kaas-Petersen85, Kaas-Petersen87] jeweils mit erläutert.

3.2.1 Parametervariation: Der „Brute-Force“ Ansatz

Zur Verzweigungsanalyse von Schienenfahrzeugmodellen stellt die Grenzzzyklusrechnung, eingebettet in eine Parametervariation, eine einfache Methode zur Erzeugung von Verzweigungsdiagrammen dar (bei Beschränkung auf stationäre und periodische Lösungsäste), siehe dazu auch Abschnitt 2.2.2. Diese Vorgehensweise verdeutlicht auch das Grundprinzip des Brute-Force-Ansatzes. Grundlage sind Zeitintegrationen der Bewegungsgleichungen, wobei der Verzweigungsparameter jeweils schrittweise über den interessierenden Parameterbereich variiert wird. Nach jeder Integration muss zunächst der charakteristische Kennwert $k(p)$ bestimmt und gesichert werden. Dabei sind allerdings einige grundlegende, dieser Methodik immanente Schwierigkeiten zu gewärtigen, die insbesondere in der Umgebung von Verzweigungspunkten entscheidende Bedeutung erlangen können. Beispielsweise muss die Integrationszeit auf jeden Fall größer als die a priori unbekannte Einschwingzeit festgelegt werden und es ist die Frage zu klären, wie ein eingeschwungener Zustand definitiv in jedem Fall als solcher erkannt werden kann. Eine visuelle Überprüfung kann bei einer automatisierten Parametervariation höchstens nachträglich stichprobenhaft erfolgen.

Eine mögliche Verallgemeinerung dieser Vorgehensweise auf beliebige nichtlineare dynamische Systeme und erweitert auch auf quasi-periodisches und chaotisches Verhalten wird in [ParkerChua89] bis hinunter auf Algorithmusebene vorgestellt und ausführlich diskutiert. Als charakterisierende Kenngröße $k(p)$ des Systemverhaltens im eingeschwungenen Zustand werden die lokalen Maxima einer Komponente y_i des Zustandsvektors \mathbf{y} vorgeschlagen. Weiter wird die Simulationszeit in die Einschwingzeit und in eine Aufzeich-

nungszeit unterteilt, wobei letztere – beispielsweise im Falle einer periodischen Lösung – durchaus mehrere Perioden umfassen kann. Nur in der Aufzeichnungszeit werden die lokalen Maxima der gewählten Systemkomponente aufgezeichnet. Die Vorteile dieser Methode liegen sowohl in ihrer Einfachheit als auch der Allgemeinheit ihrer Anwendung, bestimmbar ist die vollständige Palette von stationären bis hin zu chaotischen Lösungen.

Die wesentlichen Probleme einer Parametervariation lassen sich auf die Anfangsbedingungen der Integration, die Integrationszeit sowie die Variationsschrittweite und deren Äquidistanz reduzieren. Erstere beeinflussen u.a. in Abhängigkeit von der Systemdämpfung erheblich die unbekannte Einschwingzeit und damit die eigentlich zu fordernde Integrationszeit. Die Variationsschrittweite bestimmt die Feinheit der Auflösung und somit auch die Genauigkeit der Verzweigungspunkte sowie den erforderlichen Rechenaufwand. Die Methode(n) der Pfadverfolgung umgehen diese Probleme durch einen *direkten* Ansatz, bei dem allein der eingeschwungene Zustand betrachtet wird.

3.2.2 Pfadverfolgung

Die Methoden der Pfadverfolgung oder Fortsetzung erlauben es, das Systemverhalten nichtlinearer dynamischer Systeme bei Änderung eines (oder mehrerer) Systemparameter durch eine direkte Betrachtung allein des eingeschwungenen Zustands zu untersuchen. Gegeben sei eine Abbildung $\mathbf{Q}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die einen bestimmten Typus von Lösungen der Systemgleichungen (3.2) – oder einschränkend von Attraktoren – charakterisiert. Diese Abbildung definiert das nichtlineare Gleichungssystem (NLGS)

$$\mathbf{Q}(\mathbf{y}, p) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

als entsprechende Bestimmungsgleichung. Gegeben sei weiter ein Anfangspunkt (\mathbf{y}^0, p^0) , der diese Gleichungen erfüllt, $\mathbf{Q}(\mathbf{y}^0, p^0) = \mathbf{0}$, und somit gleichzeitig auch Lösungspunkt von (3.2) ist. Der Punkt (\mathbf{y}^0, p^0) liegt also auf einem Ast bzw. *Pfad* des Systems (3.2), siehe Abschnitt 3.1.1, der durch die Bestimmungsgleichungen (3.3) charakterisiert ist. Eine Pfadverfolgung besteht nun darin, eine Serie weiterer Punkte

$$(\mathbf{y}^1, p^1), (\mathbf{y}^2, p^2), (\mathbf{y}^3, p^3), \dots$$

auf diesem Lösungsast zu finden. Als Nebeneffekt erlauben die meisten Methoden gleichzeitig auch die Beurteilung der gefundenen Lösungen bezüglich ihrer Stabilität sowie die Lokalisierung von Verzweigungspunkten. Die mathematische Basis der Pfadverfolgung wird durch den *Satz über Implizite Funktionen* gebildet, z.B. [Seydel94, app. A.4] oder [AllgowerGeorg03]. Sei $\mathbf{Q}(\mathbf{y}^*, p^*) = \mathbf{0}$ für einen Punkt $(\mathbf{y}^*, p^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt. Dann garantiert dieser Satz unter der Annahme entsprechender Glattheit der Funktion \mathbf{Q} einen glatten, eindeutigen Verlauf des zugehörigen, über (3.3) definierten Pfades des Gleichungssystems (3.2) im \mathbb{R}^{n+1} in einem Parameterintervall $p_1 < p^* < p_2$. Voraussetzung dazu ist eine reguläre Jacobimatrix $\mathbf{Q}_y(\mathbf{y}^*, p^*)$. Theorie und Numerik der Pfadverfolgung sind ausführlich in [AllgowerGeorg03] beschrieben.

Vergleichbar mit einem Integrationsalgorithmus (siehe z.B. [DeuffhardBornemann94] oder [AscherPetzold98], als unabhängige Variable ist der Systemparameter p zu setzen) ist im

Rahmen einer Pfadverfolgung auf der Grundlage einer *bekannten Lösung* $(\mathbf{y}^{j-1}, p^{j-1})$ der Bestimmungsgleichungen (3.3) im Schritt j , $j = 1, 2, \dots$, eine Nachbarlösung (\mathbf{y}^j, p^j) für einen fortgeführten Parameterwert p^j zu finden. Ebenso wie dort kommen hierzu häufig *Prädiktor–Korrektor* Verfahren zum Einsatz, die auf den beiden Schritten

$$(\mathbf{y}^{j-1}, p^{j-1}) \xrightarrow{\text{Prädiktor}} ({}^p\mathbf{y}^j, {}^p p^j) \xrightarrow{\text{Korrektor}} (\mathbf{y}^j, p^j), \quad j = 1, 2, \dots$$

aufbauen; jedoch wird in der Regel die Prädiktorlösung die Definitionsgleichung (3.3) nicht erfüllen. Die Schrittweite als Maß für den Abstand zwischen den beiden Punkten $j-1$ und j (Prädiktor) wird dabei meist für jeden Schritt über eine numerische Steuerung „möglichst gut“ gesondert festgelegt. In Abb. 3.3 ist das Vorgehen schematisch dargestellt.

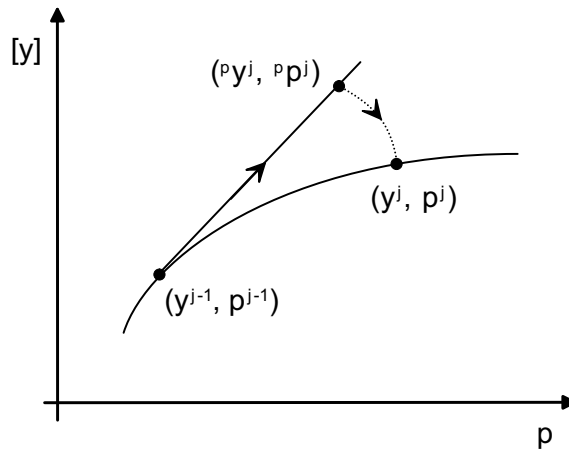


Abbildung 3.3: Prinzip der Pfadverfolgung mit einem Prädiktor–Korrektor–Schema.

Zur Verfolgung stationärer Lösungen der Systemgleichungen (3.2) geht allein deren rechte Seite in die Grundgleichung (3.3) ein, $\mathbf{Q}(\mathbf{y}, p) := \mathbf{f}(\mathbf{y}, p)$. Im Falle periodischer Lösungen gestaltet sich eine entsprechende Definition schwieriger. Es stehen unterschiedliche Methoden zur Verfügung, die hier verwendete und in Kapitel 4 ausführlicher diskutierte baut ebenfalls auf der Grundgleichung (3.3) auf. Der Residuenvektor \mathbf{Q} folgt dabei aus der Differenz zwischen Anfangszustand und Endzustand des Systems nach Ablauf einer im Falle autonomer Systeme a priori unbekannten Periode T_P zu $\mathbf{Q} := \mathbf{y}(\mathbf{y}_0, p, t = T_P) - \mathbf{y}_0(t = 0)$.

Die Methoden zur Pfadverfolgung bauen also auf den Grundbausteinen *Prädiktor*, *Korrektor* und *Schrittweitensteuerung* auf. Darüber hinaus ist noch ein Verfahren zur *Parametrierung* des Pfades im \mathbb{R}^{n+1} erforderlich. In diesen vier Grundfunktionalitäten unterscheiden sich die Algorithmen der Programmpakete zur Pfadverfolgung, beispielhaft sollen jeweils gängige Vorgehensweisen kurz skizziert werden. Eine besondere Betonung liegt dabei auf dem Verfolgungsalgorithmus PATH.

Zur Generierung eines *Prädiktors* existiert eine ganze Reihe unterschiedlicher Methoden und Varianten, eine sehr gute Übersicht ist in [Seydel94] zu finden; die Problematik sei anhand des Polynom–Prädiktors erläutert. Bildet man aus m unmittelbar vorhergehenden

Lösungspunkten $(\mathbf{y}^{j-l}, p^{j-l})$, $l = 1, \dots, m$, ein Polynom (höchstens) $(m-1)$ -ten Grades, lässt sich die Lösung \mathbf{y}^j für den Parameterwert p^j im Schritt j daraus mittels Extrapolation annähern. Den einfachsten Prädiktor erhält man auf diese Weise für $m = 1$: $({}^p\mathbf{y}^j, {}^p p^j) := (\mathbf{y}^{j-1}, p^{j-1})$, eine modifizierte Version stellt $({}^p\mathbf{y}^j, {}^p p^j) := (\mathbf{y}^{j-1}, p^j)$ dar; dabei wird der Parameterwert p^j im Schritt j auf der Grundlage einer entsprechenden, in der Regel vorab festgelegten Diskretisierung vorangetrieben. Ein Polynom ersten Grades ($m=2$) ergibt eine lineare Extrapolation, das Verfahren wird auch als Sekanten-Prädiktor bezeichnet. Approximiert man die aktuelle Tangente \mathbf{t}^{j-1} an den Pfad mit dieser Sekante,

$$\mathbf{t}^{j-1} \approx (\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{y}^{j-2}, p^{j-1} - p^{j-2}), \quad (3.4)$$

kann der Sekanten-Prädiktor auch als Näherung für den Tangenten-Prädiktor

$$({}^p\mathbf{y}^j, {}^p p^j) := (\mathbf{y}^{j-1}, p^{j-1}) + h^j \cdot \mathbf{t}^{j-1} \quad (3.5)$$

mit noch festzulegender Schrittweite h^j interpretiert werden. Der Tangenten-Prädiktor entspricht einem Euler-Schritt zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, die entsprechende Fehlerabschätzung gilt folglich formal auch hier. Daneben ist er auch im Falle einer singulären Jacobimatrix \mathbf{Q}_y anwendbar, einer Konstellation, die einen bestimmten Typ von Verzweigungspunkt kennzeichnet. Polynome höheren Grades $m \geq 2$ kommen seltener zur Anwendung.

Die allgemeine Grundgleichung (3.3) zur Pfadverfolgung stellt ein System von n nicht-linearen Gleichungen bei $n+1$ unbekannten Variablen (\mathbf{y}, p) dar, es ist also unterbestimmt. Ein derart bestimmter Lösungsast bildet definitionsgemäß stets eine glatte Kurve im Zustands-Parameter-Raum, die nach Einführung eines vorerst beliebigen Kurvenparameters β durch ihre Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}(\beta) \\ p &= p(\beta) \end{aligned}$$

beschrieben werden kann. Wird eine solche *Parametrierung* durch Anhängen einer skalaren Zusatzgleichung $u(\mathbf{y}, p, \beta) = 0$ an das unterbestimmte Gleichungssystem (3.3) berücksichtigt, besteht das sich daraus ergebende, erweiterte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{y}, p) \\ u(\mathbf{y}, p, \beta) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

aus $n+1$ Gleichungen in ebenso vielen Unbekannten, ein Lösungspunkt (\mathbf{y}^j, p^j) ist bei festem β also eindeutig bestimmt.

Eine nahe liegende Parametrierung ist durch den Verfolgungsparameter p selbst gegeben, $\beta := p$, als Zusatzgleichung ergibt sich dann $u(\mathbf{y}, p) := p - p^j = 0$. Diese Vorgehensweise bereitet allerdings bei einer zur Parameterachse orthogonalen Tangente \mathbf{t} an den Pfad Probleme. Als Alternative kann die Bogenlänge s des aktuellen Astes verwendet werden, $\beta := s$, oder eine einzelne Komponente y_k , $k \in [1; n]$, des Zustandsvektors; auch hier sei für nähere Ausführungen wieder auf [Seydel94] verwiesen.

Aufgabe des *Korrektors* ist es, die durch den Prädiktor berechnete Anfangsschätzung (${}^p\mathbf{y}^j, {}^p p^j$) der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3.3) oder (3.6) bis innerhalb vorgegebener Grenzen zu verbessern, das System also „wieder auf den Pfad zurückzuführen“. Der Einfachheit halber sei für die folgenden Ausführungen der Systemparameter p als konstant angesehen ($u(\mathbf{y}, p) := p - p^j = 0$ in Gleichung (3.6)), es ist also das n -dimensionale NLGS $\mathbf{Q}(\mathbf{y}, p = p^j) = \mathbf{0}$ ausgehend von der Anfangsschätzung ${}^p\mathbf{y}^j$ bezüglich des unbekannten Systemzustandes \mathbf{y} aufzulösen³. Zum Einsatz kommen meist iterative Newton-Verfahren, die unter der Voraussetzung einer regulären $(n \times n)$ -System-Jacobimatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}$ (und anderer) bei hinreichend genauer Anfangsschätzung ${}^p\mathbf{y}^j$ eine quadratische Konvergenz *in der Nähe der Lösung* garantieren, [Stoer99]. Im Rahmen einer Pfadverfolgung führt bei Nicht-Konvergenz der Lösung die ein- oder mehrfache Verkürzung der Verfolgungsschrittweite (nicht zu verwechseln mit den Newton-Schritten) durch eine geeignete Schrittweitensteuerung über verbesserte Anfangsschätzungen oftmals doch noch zu einer konvergierenden Lösungsfolge.

Für aufwändige Systeme, wie sie Modelle von Schienenfahrzeugen normalerweise darstellen, ist die Iterations- oder Jacobimatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}$ nicht mehr analytisch berechenbar. Einen Ausweg bietet die numerische Approximation mittels *finiter Differenzen*. Einfache Vorwärtsdifferenzen ergeben beispielsweise mit dem k -ten Einheitsvektor \mathbf{e}_k sowie geeignet gewählter kleiner Störung Δ für die Spalte k der Jacobimatrix ($k = 1, \dots, n$)

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y_k} \approx \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{y} + \Delta \cdot \mathbf{e}_k) - \mathbf{Q}(\mathbf{y})}{\Delta}. \quad (3.7)$$

Allerdings geht dabei die quadratische Konvergenz der Iteration verloren, die numerische Berechnung der Jacobimatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}$ ist darüber hinaus durch die n erforderlichen Auswertungen von \mathbf{Q} sehr aufwändig. Quasi-Newton-Verfahren erlauben eine erhebliche Verkürzung der Rechenzeiten indem eine Iterationsmatrix für möglichst viele Iterationsschritte beibehalten wird; anstatt einer erneuten numerischen Auswertung nach (3.7) können zuvor noch so genannte analytische „Broyden-Updates“ durchgeführt werden (Rang-1-Verfahren). Insgesamt verschlechtert sich dadurch das Konvergenzverhalten der Iteration zusätzlich, dieses kann dann wiederum durch eine geeignete numerische Dämpfung verbessert werden (*gedämpfte Quasi-Newton-Verfahren*; [Stoer99, Eich-SoellnerFührer98]).

Prinzipiell ist allein mit den drei beschriebenen Grundbausteinen bereits eine Pfadverfolgung durchführbar. Um aber sowohl den Gesamtrechenaufwand zu reduzieren als auch Verzweigungspunkte mit einer definierten Genauigkeit lokalisieren zu können ist es sinnvoll, eine geeignete *Schrittweitensteuerung* im Prädiktorschritt (3.5) vorzusehen. Deren Spezifizierung kann nur im Hinblick auf die gewählten Verfahren der drei Bausteine Prädiktor, Korrektor und Parametrierung erfolgen. Das Grunddilemma lässt sich dabei wie folgt beschreiben: Eine zu große Schrittweite h^j in (3.5) erfordert aufgrund langsamer Konvergenz viele Korrektoriterationsschritte, eine zu kleine Schrittweite erfordert viele Verfolgungsschritte. Üblicherweise baut eine Schrittweitensteuerung auf dem Konvergenzverhalten der unmittelbar vorhergehenden Korrektoriteration(en) auf.

³Wird zur Lösung des erweiterten Systems (3.6) ein erweiterter Systemvektor $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{y}^T, p)^T$ eingeführt, können die beschriebenen Verfahren direkt übernommen werden.

Implementierung in PATH

Die Pfadverfolgung in PATH ist als Prädiktor–Korrektor–Schema realisiert. Dabei liefert die Sekante durch die beiden zuletzt berechneten Lösungspunkte des Pfades im Zustands–Parameter–Raum gemäß (3.4) eine Approximation für den Tangenten–Prädiktor (3.5) zur Schätzung eines Anfangswertes der Korrektoriteration. Die Schrittweite h^j wird wie folgt festgelegt: Ist die Anzahl der Korrektoriterationsschritte im Verfolgungsschritt $j-1$ erheblich größer als eine angenommene (optimale) Anzahl, wird die Schrittweite um einen bestimmten Faktor reduziert, ist diese jedoch erheblich kleiner, wird die Schrittweite entsprechend vergrößert; geeignete Ober– und Untergrenzen beschränken die Schrittweite.

Die ehemals einfache Newton–Iteration des Korrektors ist zu einem gedämpften Quasi–Newton– bzw. Broyden–Verfahren nach [AscherMattheijRussell95] ausgebaut. Die Parametrierung erfolgt durch die Beschränkung der Suchrichtung der Iteration auf eine n –dimensionale Hyperebene $H \in \mathbb{R}^{n+1}$ *orthogonal* zu der bereits als Prädiktor verwendeten Tangente an den Pfad: $H \perp \mathbf{t}$ mit $(\mathbf{t}^{j-1} =:) \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Im Gegensatz zu den oben angeführten *direkten* Parametrierungen der durch (3.3) definierten Raumkurve des Pfades wird hierbei der Weg der Korrektoriteration von der Anfangsschätzung $({}^p\mathbf{y}^j, {}^p p^j)$ zurück auf den Pfad parametrisiert, der aktuelle Lösungspunkt (\mathbf{y}^j, p^j) ergibt sich dann als Schnittpunkt der Hyperebene H mit dem Pfad.

Die Ebene H kann im Zustands–Parameter–Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ durch ein zu der Tangente \mathbf{t} orthogonales System von n ortho–normierten Basisvektoren $\mathcal{B}_H := \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n\}$ beschrieben werden (mit $\mathbf{h}_k, \mathbf{h}_{\bar{k}} \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\mathbf{h}_k^T \cdot \mathbf{h}_{\bar{k}} = \delta_{k\bar{k}}$ mit $k, \bar{k} = 1, \dots, n$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{k\bar{k}}$). Der Verbleib der Iteration(srichtung) in der Ebene H wird in einem abgewandelten Newton–Verfahren sichergestellt, indem die Iterationsmatrix $\mathbf{Q}_\eta^H := \mathbf{Q}_{\mathbf{y},p}^H$ spaltenweise aus den Richtungsableitungen bezüglich des Orthonormalsystems \mathcal{B}_H gebildet wird. Es werden also nur mit \mathcal{B}_H bzw. H konforme Störungen betrachtet. Da die Iteration in der Hyperebene H und damit im Zustands–Parameter–Raum \mathbb{R}^{n+1} stattfindet, wird das Differenzenschema (3.7) dabei auf den erweiterten Vektor $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{y}^T, p)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ angewandt, man erhält als Iterationsmatrix

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^H}{\partial \eta_k} = \frac{\mathbf{Q}^H(\boldsymbol{\eta} + \Delta \cdot \mathbf{h}_k) - \mathbf{Q}^H(\boldsymbol{\eta})}{\Delta}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \dim(\mathbf{Q}_\eta^H) = (n \times n).$$

Das Inkrement $\Delta \boldsymbol{\eta}^{H,l} \in H$ als Lösung der Newton–Gleichung $\mathbf{Q}_\eta^{H,l} \cdot \Delta \boldsymbol{\eta}^{H,l} = -\mathbf{Q}^H(\boldsymbol{\eta}^l)$ im Iterationsschritt l ergibt sich somit in Koordinaten der Basis \mathcal{B}_H , muss also zur Auswertung von $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}^{l+1})$ im nächsten Iterationsschritt noch auf die kanonische Basis in \mathbb{R}^{n+1} rückprojiziert werden.

3.2.3 Stabilitätsanalyse

Die Klassifizierung des Bewegungsverhaltens allgemeiner dynamischer Systeme (3.2) bezüglich ihrer Stabilität ist eine der wesentlichen Aufgaben der nichtlinearen Systemdynamik. Betrachtet wird hier und im Folgenden ausschließlich lokale Stabilität deren stationärer und periodischer Lösungen im Sinne der in Abschnitt 3.1.1 kurz angerissenen Stabilitätsdefinition. Ausführliche Betrachtungen sowie Verfahren zur Stabi-

litätsbewertung dynamischer Systeme werden in den entsprechenden Lehrbüchern wie [GuckenheimerHolmes96, NayfehBalachandran95] gegeben und diskutiert; hier sind nur die wesentlichen Ergebnisse kurz zusammengefasst.

Im Falle stationärer Lösungen (Fixpunkte) \mathbf{y}_s des autonomen Systems (3.2) werden zur Beurteilung der Stabilität im Sinne von LJAPUNOV die n komplexen Eigenwerte $\lambda_i = \operatorname{Re}(\lambda_i) + j \cdot \operatorname{Im}(\lambda_i) \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ der linearen Systemmatrix $\mathbf{A} := \mathbf{f}_{\mathbf{y}}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_s}$ betrachtet. Befinden sich alle Eigenwerte von \mathbf{A} in der linken Halbebene der komplexen Ebene, d.h. gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, ist die Lösung asymptotisch stabil. Wird mindestens ein Eigenwert λ_k in der rechten Halbebene der komplexen Ebene lokalisiert, dann ist die Lösung \mathbf{y}_s instabil⁴. Befindet sich mindestens ein Eigenwert λ_k auf der imaginären Achse, $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$, ist die Stabilität des Fixpunktes allein über die Eigenwerte nicht mehr in jedem Falle zu beurteilen. Im Kontext einer Pfadverfolgung im Zustands-Parameter-Raum kann ein solcher Fixpunkt – unter weiter einschränkenden Bedingungen – einen Verzweigungspunkt repräsentieren. Auf Verzweigungspunkte wird im Anschluss näher eingegangen.

Vergleichbare lokale Stabilitätskriterien lassen sich für periodische Lösungen \mathbf{y}_p von (3.2) auf der Grundlage der FLOQUET-Theorie mittels der $(n \times n)$ Monodromiematrix \mathbf{M} definieren. Beschreibt $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s})$ die Trajektorie der Differentialgleichungen (3.2) durch einen beliebigen Anfangspunkt $\mathbf{y}(t=0) =: \mathbf{y}_0 =: \mathbf{s}$, so ergibt sich die Monodromiematrix \mathbf{M} der periodischen Lösung $\mathbf{y}_p(t)$ mit der Periode T_p und dem Anfangspunkt $\mathbf{s}_p \in \mathbf{y}_p(t)$ zu

$$\mathbf{M} := \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(T_p, \mathbf{s}_p)}{\partial \mathbf{s}}. \quad (3.8)$$

Die n Eigenwerte $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ der Monodromiematrix werden auch als FLOQUET- oder charakteristische Multiplikatoren bezeichnet. Für einen dieser (komplexen) Eigenwerte gilt dabei stets $\mu_l = 1.0$, der zugehörige Eigenvektor ist durch $\mathbf{f}(\mathbf{s}_p)$ gegeben. Die verbleibenden $n - 1$ Eigenwerte erlauben die Beurteilung der Stabilität der Lösung $\mathbf{y}_p(t)$. Befinden sich diese alle innerhalb des Einheitskreises der komplexen Ebene, d.h. gilt $|\mu_i| < 1.0$ für alle $i = 1, \dots, n - 1$, $i \neq l$, ist die Lösung asymptotisch stabil. Wird mindestens ein Eigenwert μ_k außerhalb des Einheitskreises lokalisiert, $k \neq l$, dann ist die Lösung \mathbf{y}_p instabil (eine Unterscheidung instabil – nicht-stabil kann analog dem stationären Fall erfolgen, siehe Fußnote 4). Befindet sich mindestens einer der $n - 1$ Eigenwerte auf dem Einheitskreis, $|\mu_k| = 1.0$, $k \neq l$, ist die Stabilität der Lösung allein über die Eigenwerte nicht mehr in jedem Falle zu beurteilen und ein Verzweigungspunkt kann gefunden sein.

Im Bereich der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen, insbesondere im Messwesen, ist eine abweichende Stabilitätsdefinition üblich, [Vohla96]: Der Lauf eines Fahrzeuges im Gleis wird dann als *stabil* bezeichnet, wenn durch eine beliebige Störung induzierte Radsatzschwingungen vollständig abklingen oder aber das Spurspiel durch die Querbewegung der Radsätze maximal bis zur Hälfte ausgenutzt wird. Das Spurspiel kennzeichnet dabei

⁴In [ParkerChua89] wird \mathbf{y}_s im letzteren Fall nur dann als instabil bezeichnet, wenn *alle* Eigenwerte in der rechten Halbebene zu finden sind, ansonsten wird die betrachtete Lösung als *nicht-stabil* eingestuft. Der Grund für diese feinere Unterscheidung ist, dass nur die solcherart als instabil klassifizierten Lösungen bei rückwärts gerichtetem Zeitpfeil $t \rightarrow -\infty$ zu asymptotisch stabilen Lösungen werden, [HolodniokKubicek84].

die Bewegungsfreiheit eines Radsatzes quer zum Verlauf der Schienen; begrenzt wird es durch den Kontakt eines Radspurkranks mit der Schiene. Von *instabilem* Laufverhalten spricht man also bereits, wenn Radsatzschwingungen mit entsprechend großer Amplitude auftreten; ein – im Sinne der in Abschnitt 3.1.1 gegebenen Stabilitätsdefinition stabiler – Grenzyklus mit Spurkranzkontakt wird demnach in der Laufdynamik als instabiles Fahrverhalten bezeichnet.

Implementierung in PATH

Die lineare Systemmatrix \mathbf{A} kann für komplexe Systeme von Bewegungsgleichungen, wie sie sich bei der Simulation von Fahrzeugen meist ergeben, nicht mehr analytisch berechnet werden. Die Methode der finiten Differenzen, eine mögliche Realisierung ist bereits in Gleichung (3.7) skizziert, bietet einen auch hier gewählten Ausweg. Eine geeignete Approximation von \mathbf{A} ist also bereits durch die Jacobimatrix $\mathbf{Q}_y = \mathbf{f}_y$ der Korrekturiteration zum Auffinden einer stationären Lösung ohne Zusatzaufwand gegeben (allerdings nur, falls diese auch aktuell berechnet wurde).

Die Berechnung der Floquet–Multiplikatoren (abgesehen von dem 1.0–Eigenwert) fußt in PATH auf einer geeigneten Poincaré–Abbildung und deren Differentiation. Ausgangspunkt ist das in Abschnitt 4.2 noch zu beschreibende Verfahren zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen mittels der Poincaré–Abbildung. Auch in diesem Fall ergeben sich die gesuchten Eigenwerte, also die Floquet–Multiplikatoren, aus der Jacobimatrix der Korrekturiteration; die weitere Beschreibung erfolgt dann dort.

3.2.4 Verzweigungspunkte und Verzweigungsverhalten

Neben der Verfolgung von Lösungen im Zustands–Parameter–Raum sowie deren Stabilitätsbeurteilung ist das Auffinden und Charakterisieren von Verzweigungspunkten die wesentliche Aufgabe einer Verzweigungsanalyse. Der Begriff *Verzweigungspunkt* wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet, im Weiteren sei damit stets ein ausgezeichnete Punkt auf einem oder mehreren Lösungsästen des Gleichungssystems (3.2) im Zustands–Parameter–Raum bezeichnet, an dem das Lösungsverhalten sich bei kleiner Störung des Verzweigungsparameters abrupt qualitativ verändert. Bezüglich einer Pfadverfolgung stationärer und periodischer Lösungen sind das Punkte in einem Verzweigungsdiagramm, an denen sich mehrere Lösungsäste schneiden oder aber zumindest ein Wechsel stabil \leftrightarrow instabil stattfindet. Daneben ist auch die Bezeichnung der unterschiedlichen Arten von Verzweigungen keineswegs einheitlich; das Thema wird ausführlicher z.B. in [Seydel94, NayfehBalachandran95] behandelt.

Stationäre Lösungsäste können unter anderem eine *Sattelpunkt–* oder eine *Gabelverzweigung* aufweisen. Eine notwendige Bedingung für diese Arten von lokaler Verzweigung ist, dass sich für den Verzweigungspunkt $(\mathbf{y}_v, p_v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ neben der Bedingung $\mathbf{f}(\mathbf{y}_v, p_v) = \mathbf{0}$ für eine stationäre Lösung eine singuläre Jacobimatrix $\mathbf{f}_y|_{(\mathbf{y}_v, p_v)}$ vom Rang $n - 1$ ergibt. Betrachtet man die Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ der Jacobimatrix \mathbf{f}_y , ist eine dazu äquivalente Bedingung, dass für genau einen Eigenwert $\lambda_k = 0$ erfüllt ist. Wie in Abb. 3.4

dargestellt, findet dabei stets ein Übergang stabil \leftrightarrow instabil statt, wobei zusätzlich noch eine Verzweigung von einem stationären Lösungsast zu einem anderen, ebenfalls stationären Lösungsast erfolgen kann. Im Gegensatz hierzu tritt bei einer *Hopfverzweigung* eine Verzweigung von einem stationären zu einem periodischen Lösungsast auf; der stationäre Ast ändert dabei meist seine Stabilität (stabil \leftrightarrow instabil). Ergibt sich ein stabiler periodischer Lösungsast, spricht man auch von einer überkritischen Hopfverzweigung, im Falle eines instabil periodischen Astes hingegen von einer unterkritischen. Eine notwendige Bedingung für eine Hopfverzweigung ist ein rein imaginäres, einfaches Eigenwertpaar der Jacobimatrix $\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_v, p_v)$, $\lambda_k = \pm j\omega$, wobei die verbleibenden $n - 2$ Eigenwerte einen Realteil ungleich Null aufweisen müssen. Weiter muss das imaginäre Eigenwertpaar bei Variation des Verzweigungsparameters die imaginäre Achse auch wirklich überschreiten (Transversalitätsbedingung).

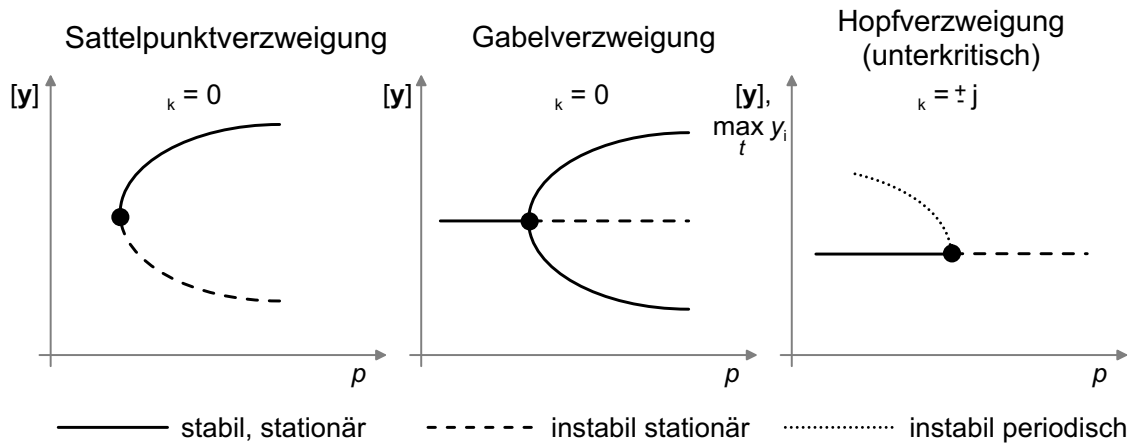


Abbildung 3.4: Typische Verzweigungen stationärer Lösungsäste. Der Verzweigungspunkt selbst ist jeweils durch den Kreis markiert. Im Falle periodischer Lösungen ist auf der Ordinate das Maximum einer Zustandsgröße über eine Amplitude aufgetragen.

Die skizzierte Charakterisierung von Verzweigungsphänomenen stationärer Lösungsäste lässt sich auch auf periodische Äste übertragen. Betrachtet wird jetzt das Verhalten der $n - 1$ Floquet-Multiplikatoren μ_i in der komplexen Ebene (der 1.0-Eigenwert entfällt dabei) bei einer Variation des Systemparameters. Eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt ist, dass sich genau ein Eigenwert oder ein komplexes Eigenwertpaar auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene befindet,

$$|\mu_k| = 1.0 .$$

Für eine Verzweigung ergibt sich somit prinzipiell eines der drei in Abb. 3.5 schematisch dargestellten Szenarien, wobei jedes Szenario eine oder mehrere Arten lokaler Verzweigungen kennzeichnet. Im Fall (a) kann in analoger Weise zu stationären Verzweigungen eine *Sattelpunktverzweigung* oder eine *Gabelverzweigung* auftreten. Vergleichbar dem in Abb. 3.4 dargestellten stationären Fall kennzeichnet jetzt beispielsweise eine Sattelpunktverzweigung den Übergang von einem instabil periodischen zu einem stabil periodischen

Verhalten. Ein Eigenwert $\mu_k = -1.0$, Fall (b), deutet auf eine Verzweigung in Form einer Periodenverdopplung hin. Das kann bedeuten, dass ein stabil periodischer Ast instabil wird und gleichzeitig ein 2-periodischer⁵ Ast entsteht; oder aber ein 2-periodischer Ast verzweigt in einen 4-periodischen usw., nach endlich vielen Periodenverdopplungen kann dann Chaos auftreten. Der Fall (c) zeigt eine Verzweigung von einem periodischen Lösungsast in einen *quasi-periodischen* Ast an. Diese Art von Verzweigung wird häufig auch als *verallgemeinerte Hopfverzweigung* oder *Neimarkverzweigung* bezeichnet.

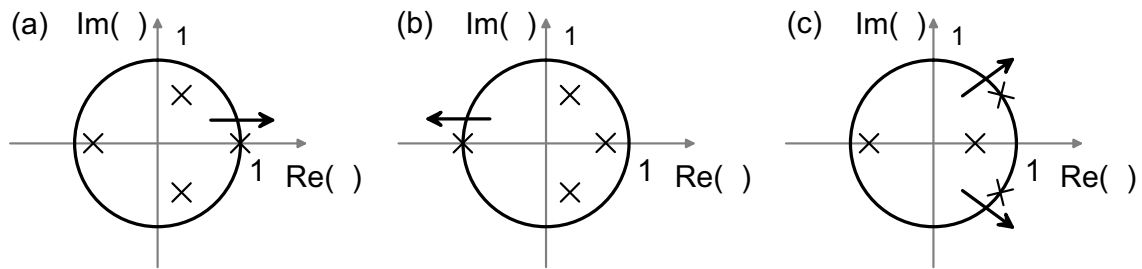


Abbildung 3.5: Mögliche Szenarien von Floquet-Multiplikatoren μ_i , $i = 1, \dots, n-1$, die in der komplexen Ebene bei einer Variation des Systemparameters p den Einheitskreis verlassen. Ein Verzweigungspunkt ist dadurch gekennzeichnet, dass sich genau ein Eigenwert(paar) auf dem Einheitskreis befindet, $|\mu_k| = 1.0$.

Im Rahmen einer Pfadverfolgung erlauben die vorgestellten Eigenwertbedingungen das Erkennen sowie eine (allerdings nicht immer eindeutige) Charakterisierung von Verzweigungspunkten. Hierzu werden diese Bedingungen so in eine geeignete Testfunktion $t(\mathbf{y}, p)$ umformuliert, dass ein Verzweigungspunkt einer Nullstelle dieser Testfunktion entspricht. Im Laufe der Verfolgung ergibt sich dann aus einem Vorzeichenwechsel der Testfunktion das Parameterintervall, in dem eine Verzweigung stattfindet. Über eine anschließende Interpolation oder eine geeignete Iteration lässt sich dann der Verzweigungspunkt abschätzen oder aber das entsprechende Parameterintervall weiter einschränken. Ein Beispiel für eine solche Testfunktion, gültig allerdings nur für stabile Lösungen, wäre die Betrachtung des kritischen Eigenwerts:

$$t(\mathbf{y}, p) = \max_i \text{Re}(\lambda_i) \quad (\stackrel{?}{=} 0) \quad i = 1, \dots, n \quad \leftarrow \text{stationär} , \quad (3.9)$$

$$t(\mathbf{y}, p) = \max_i |\mu_i| - 1.0 \quad (\stackrel{?}{=} 0) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \leftarrow \text{periodisch} . \quad (3.10)$$

Verallgemeinernd könnte auch die Anzahl der instabilen Eigenwerte zwischen aufeinander folgenden Verfolgungsschritten verglichen werden. Aufgrund der Charakterisierung der Verzweigung lässt sich das Lösungsverhalten nach der Verzweigung dann zumindest qualitativ vorhersagen.

⁵Betrachtet man eine (einfach oder 1-) periodische Lösung in einer Poincaré-Ebene (näheres dazu in Abschnitt 4.2), ergibt sich ein einziger Fixpunkt. Eine 2-periodische Lösung ergibt 2, eine m -periodische Lösung m getrennte Fixpunkte.

Im Falle von Verzweigungsdiagrammen für Schienenfahrzeuge mit der Fahrgeschwindigkeit als Parameter, schematisch dargestellt in Abb. 3.1, kennzeichnet eine unterkritische Hopfverzweigung des stationären Astes die lineare Grenzgeschwindigkeit. Die nichtlineare Grenzgeschwindigkeit entspricht einer Sattelpunktverzweigung des periodischen Astes.

Implementierung in PATH

Das Erkennen von Verzweigungspunkten baut auch in PATH auf den Eigenwerten der System–Jacobimatrix bzw. der Monodromiematrix auf. Wird durch eine im Vergleich zu (3.9) bzw. (3.10) verallgemeinerte Testfunktion eine Verzweigung zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Verfolgungsschritten $j-1$ und j festgestellt, legen die beiden entsprechenden Parameterwerte die Grenzen des Parameterintervalls fest, in dem eine Verzweigung stattgefunden hat, $p_v \in [p^{j-1}; p^j]$. Eine genauere Lokalisierung der Verzweigung in diesem Intervall wird dann noch mit Hilfe einer Regula–falsi–Iteration einer abgewandelten Testfunktion (3.9) bzw. (3.10) durchgeführt.

3.3 Zusammenfassende Gegenüberstellung der Berechnungsmethoden

Nachdem in Abschnitt 2.2 die derzeit gängigen, industriell eingesetzten Berechnungsverfahren zur Untersuchung des Laufverhaltens von Schienenfahrzeugen zusammengefasst sind, widmet sich das aktuelle Kapitel der Methode der Verzweigungsanalyse. Zur Beurteilung von Schienenfahrzeugen wird dieses Verfahren der nichtlinearen Systemtheorie meist in Form der Parametervariation angewendet, der Einsatz einer algorithmisierten Pfadverfolgung beschränkt sich im Wesentlichen auf den akademischen Bereich. Dabei ermöglichen allerdings erst bestimmte Modellvereinfachungen die Anwendung entsprechender Verfolgungssoftware. Als wesentliche Voraussetzungen seien hier die Reduktion der Modellkomplexität bis auf Drehgestellebene sowie die Annahme einer linearen Kontaktgeometrie zwischen Rad und Schiene genannt. Das bedeutet aber auch, dass die Pfadverfolgung zur Verzweigungsanalyse für den Bereich der industriellen Schienenfahrzeugsimulation durchaus als neu bezeichnet werden kann. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist es, diese Methode für eine industrielle Anwendung bei Vermeidung der genannten Modellierungsvereinfachungen zur Verfügung zu stellen. Deshalb soll im Folgenden das Verfahren der Verzweigungsanalyse auf der Grundlage einer Pfadverfolgung in die Gesamtheit der üblicherweise im Schienenfahrzeugbereich eingesetzten Berechnungsverfahren eingliedert und diesen kritisch gegenübergestellt werden.

Die Lineare Systemanalyse stellt unter dem Gesichtspunkt der Anwendbarkeit relativ einfache und sehr effiziente Verfahren zur Untersuchung der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen zur Verfügung. Bei entsprechender Reduktion der Bewegungsgleichungen kann sogar auf den Einsatz von Computern verzichtet werden. Ein gutes Beispiel hierfür stellt die KLINGELsche Formel (2.8) dar, die nach [Vohla96] bis ca. 1960 die Grundlage zur frequenzmäßigen Auslegung der Fahrzeugaufhängung bezüglich der Laufdynamik im geraden Gleis bildete.

Ein wichtiges Beurteilungskriterium der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen ist die Stabilität der Gleichgewichtslage, insbesondere auch in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit, [Wickens65]. Die Schwelle zu deren Instabilität, die lineare Grenzgeschwindigkeit, ist zwar auf der Basis der linearen Bewegungsgleichungen bestimmbar, jedoch haben Messfahrten gezeigt, dass bei realen Fahrzeugen bereits auch unterhalb dieser Schwelle unerwünschtes Grenzzyklusverhalten auftreten kann, [True93]. Die kleinere, eigentlich kritische Geschwindigkeit, die nichtlineare Grenzgeschwindigkeit, ist dagegen nur mit den Hilfsmitteln der nichtlinearen Systemtheorie zu ermitteln. Zwei Prinzipien stehen zur Auswahl, die Parametervariation über eine numerische Integration der Bewegungsgleichungen oder die automatisierte numerische Pfadverfolgung, zusammengefasst unter dem Begriff der Verzweigungsanalyse. Allein die Verzweigungsanalyse erlaubt aber auch eine umfassende Untersuchung der Parameterabhängigkeit *nichtstationären* Verhaltens, beispielsweise von Grenzzyklen, in Bezug auf Stabilität, Koexistenz verschiedener Attraktoren bei einer gleichzeitigen eventuellen Abgrenzung der zugehörigen Einzugsbereiche und sowohl quantitativer als auch qualitativer Veränderlichkeit der Lösungen.

Wie dieses Beispiel stellvertretend für eine Vielzahl unterschiedlichster Simulationsaufgaben zeigt, ist die Beschränkung auf kleine Abweichungen von einer Referenzkonfiguration, der grundlegenden Voraussetzung linearer Analysemethoden, in vielen Fällen nicht mehr ausreichend. Die Berücksichtigung der vollständigen nichtlinearen Systembeschreibung ist dann unausweichlich, insbesondere sei auf die in Abb. 2.5 auf S. 20 beispielhaft dargestellten nichtlineare Profilgeometrien von Rad und Schiene hingewiesen. Da die meisten der entsprechenden Verfahren auf der Zeitschrittintegration der nichtlinearen Systemgleichungen aufbauen ist der Preis hierfür ein erheblich gesteigerter Rechenaufwand.

Typische Anwendungsbereiche der nichtlinearen Bewegungsgleichungen sind z.B. die Simulation von Fahrzeugen mit Neigetechnik, die Grenzzyklusberechnung im geraden Gleis und die Fahrt entlang beliebiger (gemessener) Trassierungen wie eine Kurven- oder eine Weichendurchfahrt. Um zu möglichst umfassenden Aussagen zu gelangen, werden die erforderlichen Berechnungsverfahren in geeignete analytische oder automatisierte Parametervariationen integriert.

Kommt die Simulation bereits in der Entwurfsphase zur Auslegung eines Fahrzeuges zum Einsatz, besteht eine wichtige Aufgabe darin, bestimmte Entwurfparameter (z.B. Feder- und Dämpferkoeffizienten der Aufhängungen) im Hinblick auf die Einhaltung definierter Grenzwerte festzulegen. Dabei gilt es aber auch, gewisse, nur ungenau bekannte Systemparameter wie Reibbeiwerte etc. möglichst realitätsnah zu fixieren, eine Hürde, die es generell auch bei der Bewertung/Nachrechnung existierender Fahrzeuge zu nehmen gilt. Zusammenfassend stellt sich also das Problem, definierte Modellparameter auf der Grundlage bestimmter Kriterien zu quantifizieren. Prinzipiell ist hierbei mit Hilfe einer (zumindest teilweise automatisierten) einfachen Parametervariation über eine Zeitintegration eine gewisse Abhilfe zu schaffen, der Einsatz entsprechender softwarecodierter Parameteridentifikations- bzw. Optimierungsmethoden verringert aber normalerweise den erforderlichen Aufwand und steigert vor allem die erreichbare Qualität des Ergebnisses erheblich, [Grupp96, SchroederKortüm00, Bestle94]. In Abb. 2.2 auf S. 13 ist dieser Schritt auch als Übergang auf eine intelligente, d.h. algorithmus-gesteuerte Parametervariation bezeichnet.

Eine andere Fragestellung betrifft die Verzweigungsanalyse, also die Untersuchung der Fahrzeugreaktion auf sich ändernde Parameter. Auch hier kann wiederum eine entsprechende Parametervariation befriedigende Ergebnisse liefern. Vergleichbar zum gewinnbringenden Einsatz geeigneter Optimierungs- oder Identifikationsmethoden erlaubt allerdings auch die Pfadverfolgung eine bedeutende Reduktion des Gesamtaufwands einer Untersuchung, wobei gleichzeitig qualitativ hochwertigere Resultate zu erwarten sind. Die situationsangepasste Steuerung der Schrittweite in Kombination mit den direkten Methoden zum Auffinden stationärer und vor allem periodischer Lösungen ermöglicht dabei die Einhaltung wohldefinierter Fehlerschranken unter Ausschluss jeglicher Einschwingvorgänge und der damit einhergehenden Komplikationen (unbekannte Einschwingdauer, Feststellung definitiver Periodizität etc.). Infolgedessen werden aber auch eventuelle Auswertefehler und Fehlinterpretationen automatisiert vermieden. Der große Vorteil der Pfadverfolgung gegenüber der Parametervariation ist also nicht so sehr in einer kürzeren Rechenzeit zu sehen, sondern vielmehr in einer Reduktion des Gesamtaufwands zur Bearbeitung bei einer erheblichen Steigerung der Sicherheit und Qualität der Verzweigungsdiagramme.

Kapitel 4

Periodische Lösungen: Direkte Berechnung

Einen wichtigen, wenn nicht gar den entscheidenden Bestandteil der im vorherigen Kapitel vorgestellten Methoden der Pfadverfolgung zur computergestützten Erzeugung von Verzweigungsdiagrammen stellt die Korrekturiteration dar. Deren Aufgabe ist es, ausgehend von einem mit dem Prädiktor erzeugten Anfangsschätzwert eine aktuelle stationäre oder periodische Lösung der Systemgleichungen (3.2) zu finden. Im Falle stationärer Lösungen gilt es dazu, das nichtlineare Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{y}, p) = \mathbf{0}$ durch ein geeignetes Iterationsverfahren zu lösen; dies ist im Allgemeinen problemlos durchführbar und soll im weiteren nicht mehr betrachtet werden. Die *direkte* Berechnung periodischer Lösungen hingegen gestaltet sich sehr viel schwieriger und aufwändiger und ist Inhalt dieses Kapitels.

Periodische Lösungen oder *Grenzzyklen* des autonomen Systems n gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, p), \quad \mathbf{y}(t=t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (4.1)$$

zeichnen sich dadurch aus, dass der Ausgangszustand bei beliebiger Zeit t_0 nach Ablauf der Periode T_P wieder erreicht wird,

$$\mathbf{y}(t_0 + T_P) = \mathbf{y}(t_0). \quad (4.2)$$

Zur direkten Berechnung periodischer Lösungen von (4.1) stehen zum einen Zeitbereichsverfahren zur Verfügung, die auf einer Formulierung als *Randwertproblem* (RWP) aufbauen. Dazu wird das Differentialgleichungssystem (4.1) um die Periodizitätsbedingung (4.2) für die Anfangszeit $t_0=0$ als Randbedingung $\mathbf{r}(\mathbf{y}(t=0), \mathbf{y}(t=T_P)) = \mathbf{0}$ erweitert. Mit der Abbildung $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{s} := \mathbf{y}(t=0)$ ergibt sich somit das RWP

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, p) \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{y}(T_P, \mathbf{s}) - \mathbf{s} \quad [=: \mathbf{r}(\mathbf{s}, \mathbf{y}(T_P, \mathbf{s}))], \quad (4.3b)$$

wobei aufgrund der als autonom vorausgesetzten Systemgleichungen die Periode T_P a priori nicht bekannt ist. Gelöst werden solche Randwertprobleme entweder mit Anfangswertverfahren, die auf der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen (4.3a) aufbauen, oder aber mit Differenzenverfahren, die auf meist sehr große nichtlineare algebraische

Gleichungssysteme führen. Eine umfassende Zusammenstellung und Diskussion der numerischen Methoden zur Lösung von Randwertproblemen wird in [AscherMattheijRussell95, AscherPetzold98] gegeben. Im Gegensatz dazu stellt die Methode der *Harmonischen Balance* ein typisches Frequenzbereichsverfahren dar, bei dem eine periodische Lösung durch eine (begrenzte) Fourierreihe approximiert wird, [ParkerChua89].

In diesem Kapitel sollen die angegebenen Verfahren zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen zunächst näher erläutert und gegeneinander abgegrenzt werden, wobei die Betonung auf den Anfangswertverfahren liegt. Daraufhin wird dann der bisherige, entsprechende Algorithmus der Verfolgungssoftware PATH kurz vorgestellt und insbesondere in Bezug auf eine Anwendung im Schienenfahrzeugbereich diskutiert. Die Einschränkung auf eine lineare Kontaktgeometrie (kegelige Radprofile auf kreiszylindrischen Schienen) vermeidet das im Anschluss daran vorgestellte, auf dem PATH-Algorithmus aufbauende neue Verfahren durch die zusätzliche Verwendung der *Variationsdifferentialgleichungen* der Systemgleichungen (4.1). Dieser Teil bildet den Schwerpunkt des Kapitels, wobei der möglichst effizienten numerischen Auswertung der Variationsdifferentialgleichungen besondere Beachtung zukommen soll. Wenn nicht anders erwähnt, wird vorerst der Verfolgungsparameter p der Einfachheit halber als jeweils konstant angenommen.

Abschließend sei noch auf zwei Besonderheiten der hier verfolgten Aufgabenstellung hingewiesen: Das Auffinden periodischer Lösungen ist erstens in einen Algorithmus zur Pfadverfolgung eingebettet. Das bedeutet, dass normalerweise eine ausreichend gute Anfangsschätzung zur Verfügung steht; falls nicht kann die Schrittweite der Verfolgung in der Prädiktorgleichung (3.5) iterativ verringert werden. Und zweitens ergeben sich für den Schlinger- oder Zickzacklauf von Schienenfahrzeugen im Gleis typischerweise Frequenzen in der Größenordnung von 2.5 Hz bis 5.0 Hz, es kann also von kleinen Perioden $T_P < 1.0$ s ausgegangen werden.

4.1 Übersicht über numerische Verfahren

Das einfachste Verfahren zum Auffinden periodischer Lösungen ist der bereits im vorigen Kapitel erwähnte „Brute-Force“-Ansatz: Die Systemgleichungen (4.1) werden so lange integriert, bis sämtliche Übergangsvorgänge vollständig abgeklungen sind. Wie ebenfalls dort diskutiert, führt diese Vorgehensweise vor allem bei der hier betrachteten Einbettung in einen Fortsetzungsalgorithmus jedoch leicht zu Fehlinterpretationen, weswegen eine der im Folgenden aufgeführten *Direkten Methoden* zur Bestimmung periodischer Lösungen vorzuziehen ist.

4.1.1 Anfangswertmethoden: Schießverfahren

Zur Lösung des Randwertproblems (4.3) integriert ein Schießverfahren die Systemdifferentialgleichung (4.3a) im Rahmen einer systematischen Variation der Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t=0) =: \mathbf{s}$. Dabei gilt es, eine Anfangsbedingung $\mathbf{s} = \mathbf{s}_p$ derjenige Trajektorie (desjenigen Orbits) $\boldsymbol{\varphi}_p(t, \mathbf{s})$ zu finden, die die Randbedingung $\mathbf{r}(\mathbf{s}_p, \boldsymbol{\varphi}_p(T_P, \mathbf{s}_p)) = \mathbf{0}$

(innerhalb gegebener Genauigkeitsanforderungen) erfüllt. Es ist also auf der Basis der Randbedingung (4.3b) das folgende n -dimensionale nichtlineare Gleichungssystem in den unbekannten Anfangszuständen \mathbf{s} zu lösen (der Einfachheit halber ist der Index „p“ wo eindeutig weggelassen):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) := \mathbf{r}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}(T_P, \mathbf{s})) := \boldsymbol{\varphi}(T_P, \mathbf{s}) - \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

Mit dieser Gleichung ist aber auch wieder eine zur Grundgleichung (3.3) der Pfadverfolgung äquivalente Formulierung gefunden. Angemerkt sei noch, dass jede Auswertung des Residuums $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$ die Integration einer Trajektorie $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s})$ bedeutet. Aufgabe eines Schießverfahrens ist es also, das Gleichungssystem (4.4) durch eine geeignete Kombination eines Integrators mit einem Iterationsalgorithmus – üblicherweise ein Newton-Verfahren – zu lösen.

Im hier betrachteten Fall autonomer Systeme ist die Periode T_P der Lösung a priori nicht bekannt. Zu deren synchroner Bestimmung macht man sich die Tatsache zu Nutze, dass eine periodische Lösung eines autonomen Systems durch eine zusätzliche skalare Phasenbedingung $u(\mathbf{s}) = 0$ gegenüber der Zeitachse fixiert werden muss; erst dann ist die Lösung eindeutig bestimmt. Damit ergibt sich ein erweitertes $(n+1)$ -dimensionales Randwertproblem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ T_P' \end{pmatrix}}_{=: \hat{\mathbf{y}}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_P \mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \hat{\mathbf{f}}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}(1, \mathbf{s}) - \mathbf{s} \\ u(\mathbf{s}) \end{pmatrix}}_{=: \hat{\mathbf{r}}} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

in den ebenfalls $n+1$ Unbekannten (\mathbf{s}, T_P) . Eine geeignete Phasenbedingung wäre beispielsweise $u(\mathbf{s}) := \dot{y}_k(0) = f_k(\mathbf{s}) = 0$ für ein beliebiges $k \in [1, n]$, andere werden in [Seydel94, NayfehBalachandran95] vorgestellt. Wie aus technischen Gründen oft angewandt, wurde dabei zugleich auch eine normalisierte Zeit τ , $\tau \in [0; 1]$ mit $t = T_P \cdot \tau$ eingeführt und berücksichtigt, $(\cdot)' := d(\cdot)/d\tau$. Es ist also das erweiterte Randwertproblem $\hat{\mathbf{y}}' = \hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ zu lösen. Ausführlich behandelt werden Schießverfahren u.a. in [StoerBulirsch00, AscherMattheijRussell95].

Einfachschießverfahren

Ausgehend von einer Anfangsschätzung \mathbf{s}^0 erzeugt ein Newton-Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems¹

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad \text{mit dem Residuum} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{s}) := \mathbf{y}(T_P, \mathbf{s}) - \mathbf{s}$$

schrittweise Näherungslösungen \mathbf{s}^l , die bei Einhaltung gewisser Voraussetzungen² gegen einen Anfangswert \mathbf{s}_p einer periodischen Lösung konvergieren. Iterationsschrittweite und -richtung $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}^{l+1} - \mathbf{s}^l$ ergeben sich dabei als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{s}^l) \cdot \Delta \mathbf{s} = -\mathbf{Q}(\mathbf{s}^l).$$

¹Aus Gründen der Übersichtlichkeit sei die Periode T_P als bekannt vorausgesetzt. Bei unbekannter Periode ist das erweiterte RWP (4.5) analog zu lösen, siehe dazu auch [NayfehBalachandran95].

²Die zwei wichtigsten sind: Der Startwert \mathbf{s}^0 muss im Einzugsbereich der Lösung \mathbf{s}_p liegen und die Jacobimatrix $\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{s}$ darf nicht singulär sein.

Ein Newton-Verfahren hängt also entscheidend von der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s ab, deren Bestimmung im Falle eines Schießverfahrens auf unterschiedliche Weisen erfolgen kann. Ist die System-Jacobimatrix \mathbf{f}_y analytisch berechenbar, folgt, wie in [AscherMattheijRussell95, NayfehBalachandran95] beschrieben, aus der Integration der linearen Variationsdifferentialgleichungen die Sensitivitätsmatrix $\partial \mathbf{y}(s)/\partial s$ und damit die Jacobimatrix $\mathbf{Q}_s = \partial \mathbf{Q}(s)/\partial s$. Muss dagegen \mathbf{f}_y numerisch berechnet werden, der Normalfall bei Anwendung von MKS-Programmen oder bei höherer Systemdimension n , wird auch \mathbf{Q}_s numerisch über eine Differenzenapproximation (3.7) aufgebaut. Aber auch diese Vorgehensweise ist nur beschränkt einsetzbar, eine ausführlichere Diskussion erfolgt in Abschnitt 4.3.1, in deren Folge ein dritter, allgemein anwendbarer Algorithmus entwickelt wird. In jedem Falle sind insgesamt $n+1$ jeweils n -dimensionale Anfangswertprobleme je Iterationsschritt zu lösen – eines zur Auswertung von $\mathbf{Q}(s^l)$, n zur Auswertung von $\mathbf{Q}_s(s^l)$, ein durchaus beträchtlicher Rechenaufwand.

Einfachschießverfahren haben zwei grundsätzliche Nachteile, die insbesondere bei der Berechnung instabiler Lösungen relevant werden können, [AscherMattheijRussell95]. Bei hoher Sensitivität der Lösung des Anfangswertproblems (4.3a) gegenüber kleinen Änderungen der Anfangswerte s kann die Akkumulation von Rundungsfehlern zu völlig unbrauchbaren Ergebnissen führen. Ebenso kann es auch vorkommen, dass aufgrund einer zu schlechten Anfangsschätzung s^0 die Lösung des Anfangswertproblems (4.3a) ihren Wertebereich verlässt, im Grunde also nicht existiert. Abhilfe (zumindest teilweise) schafft in beiden Fällen eine Verkürzung der Zeitintervalle, auf denen die Anfangswertprobleme am Stück gelöst werden. Dies ist auch die Grundidee der Mehrfachschießverfahren. Zwar stellt sich die skizzierte Problematik unter Beachtung oben genannter Besonderheiten der Aufgabenstellung (ausreichend gutes s^0 und T_P klein, siehe S. 58) nur bedingt, dennoch soll das Verfahren kurz angerissen werden.

Mehrfachschießverfahren

Ein Mehrfachschießverfahren – auch Mehrzielansatz genannt – zeichnet sich dadurch aus, dass das Integrationsintervall $[0, T_P]$ mit Hilfe eines geeigneten Gitters

$$\pi : \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T_P ,$$

in N Subintervalle unterteilt wird. Ausgehend von den unbekannten Lösungen $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{s}_i$ an den N Gitterpunkten t_i als Startwert, $0 \leq i \leq N-1$, sind dann N Anfangswertprobleme

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_i) = \mathbf{s}_i, \quad t_i < t < t_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq N-1$$

unabhängig voneinander zu lösen. Sei $\mathbf{y}_i(t; t_i, \mathbf{s}_i)$ die Lösung des Anfangswertproblems im i -ten Intervall, dann ergibt sich die stückweise definierte, nicht notwendigerweise stetige Lösung $\mathbf{y}(t)$ im Gesamtintervall $[0, T_P]$ zu $\mathbf{y}(t) := \mathbf{y}_i(t; t_i, \mathbf{s}_i)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, $0 \leq i \leq N-1$. Die insgesamt nN unbekannten Anfangsbedingungen $\mathbf{s}^T := (\mathbf{s}_0^T, \mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_{N-1}^T)$ folgen zum einen aus der Forderung nach einem stetigen Verlauf der Gesamtlösung $\mathbf{y}(t)$ über das Gitter (Schließ- oder Kontinuitätsbedingung),

$$\mathbf{y}_i(t_{i+1}; t_i, \mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq N-2 ,$$

und zum anderen aus der Randbedingung

$$\mathbf{r}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_N) := \mathbf{s}_N - \mathbf{s}_0 = \mathbf{0} ,$$

wobei $\mathbf{s}_N := \mathbf{y}_{N-1}(t_N; t_{N-1}, \mathbf{s}_{N-1})$ berücksichtigt wird. Zusammengefasst ergibt sich für die unbekannten $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{nN}$ ein System von nN nichtlinearen algebraischen Gleichungen

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) := \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 - \mathbf{y}_0(t_1; t_0, \mathbf{s}_0) \\ \mathbf{s}_2 - \mathbf{y}_1(t_2; t_1, \mathbf{s}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1} - \mathbf{y}_{N-2}(t_{N-1}; t_{N-2}, \mathbf{s}_{N-2}) \\ \mathbf{s}_0 - \mathbf{y}_{N-1}(t_N; t_{N-1}, \mathbf{s}_{N-1}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} , \quad (4.6)$$

vergleichbar den (sehr viel kleineren) Gleichungssystemen (3.3) und (4.4). Auch jetzt kann wieder ein Newton–Verfahren zur Lösung herangezogen werden. Eine Besonderheit dieses Systems ist, dass die zugehörige Jacobimatrix \mathbf{Q}_s diagonal dünn besetzt ist und deshalb zur Lösung spezielle, effiziente Sparse–Matrix–Verfahren zum Einsatz kommen können.

Implementiert ist das Mehrfachschießen beispielsweise in dem Verzweigungscode BIFPACK, [Seydel99], eine leicht abgewandelte Formulierung gelangt auch in [WulffHohmannDeuffhard94] zum Einsatz. Das Einfachschießverfahren stellt die Grundlage einiger älterer wie auch einiger neuerer codierter Algorithmen dar. Unter erstere Gruppe fallen beispielsweise der Code DERP, [HolodniokKubicek84], sowie die in [Meijaard91] beschriebene Implementierung. In [LustRooseSpenceChampneys98, LustRoose98] wird das Programm PDECONT beschrieben; bemerkenswert an dieser Umsetzung ist, dass der eigentliche Lösungsschritt des Einfachschießverfahrens auf einer Newton–Picard–Methodik aufbaut – einer geschickten Kombination von Newton– und Fixpunktiteration – wodurch sich die vollständige, explizite Berechnung der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s erübrigt. Auf das Programm PATH wird in Abschnitt 4.2 gesondert eingegangen.

Bezüglich der Anwendbarkeit von Schießverfahren kommt [Seydel94] aufgrund numerischer Erfahrungen zu folgendem Schluss: Diese arbeiten zuverlässig im Falle stabiler sowie schwach instabiler Orbits. Eine Lösung wird dabei dann als schwach instabil angesehen, wenn für die Floquet–Multiplikatoren (siehe Abschnitt 3.2.3) $\max_i |\mu_i| < 10^3$ gilt. In [LustRooseSpenceChampneys98, LustRoose98] wird darauf hingewiesen, dass bei großer Systemdimension n zur Vermeidung eines allzu großen nichtlinearen Gleichungssystems (4.6) doch Einfachschießverfahren den Mehrfachschießverfahren vorzuziehen sind. Auch in [Grupp96] wird aufgrund der Komplexität des Simulationsmodells ein Einfachschießverfahren bevorzugt (dort allerdings im Rahmen einer Parameteridentifikation).

4.1.2 Finite Differenzen

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Methoden zur Lösung des Randwertproblems (4.3) bzw. (4.5) vermeiden Finite–Differenzen–Methoden die Integration von Anfangswertproblemen. Stattdessen werden die Ableitungen in den Differentialgleichungen des RWP durch Differenzenquotienten ersetzt. Indem Näherungswerte \mathbf{y}_i der Lösung

an diskreten Punkten t_i eines geeigneten Gitters gesucht werden, ist dabei das Ziel, die Lösung im Gesamtintervall als Ganzes anzunähern. Gelingt dies mit ausreichender Genauigkeit, kann dann die Lösung an jedem beliebigen Punkt des Gesamtintervalls durch Interpolation aus den \mathbf{y}_i berechnet werden. Da im Folgenden nur der Grundgedanke der Methode der finiten Differenzen vorgestellt wird, beschränken sich die Ausführungen auf das einfachste Einschnittverfahren zur Diskretisierung des RWP (4.3), die Mittelpunktsregel. Eine ausführliche Beschreibung von Finite-Differenzen-Methoden und den gängigen, davon abgeleiteten Verfahrensklassen sowie deren Diskussion bezüglich Konvergenz und Stabilität kann wieder [AscherMattheijRussell95] entnommen werden.

Gegeben sei ein im Allgemeinen nicht-äquidistantes Gitter

$$\pi : \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T_P ,$$

für das eine diskrete Lösung $\mathbf{y}_\pi = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \in \mathbb{R}^{n(N+1)}$ mit $\mathbf{y}_i \approx \mathbf{y}(t = t_i)$ ($\mathbf{y}(t)$ sei die exakte Lösung) gesucht wird. Sei weiter $h_i := t_{i+1} - t_i$ die Schrittweite im i -ten Intervall, dann können die Zeitableitungen in $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ in jedem Teilintervall durch den Differenzenquotienten $(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i)/h_i$ ersetzt werden. Wird noch die rechte Seite der Differentialgleichung an den Mittelpunkten $(t_i + t_{i+1})/2$ der Teilintervalle zu ihrer diskreten Approximation ausgewertet, ergibt sich unter Berücksichtigung der Randbedingung (4.3b) ein System von $n(N+1)$ nichtlinearen algebraischen Gleichungen für die $n(N+1)$ unbekannten Näherungslösungen \mathbf{y}_i an den Gitterpunkten, $0 \leq i \leq N$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i}{h_i} &= \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_{i+1}}{2}\right), \quad 0 \leq i \leq N-1 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_0 \quad [:= \mathbf{r}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_N)] . \end{aligned}$$

Zur Lösung kann wieder ein Newton-Verfahren zum Einsatz kommen, die Jacobimatrix der Iteration ist dünn besetzt und weist Blockstruktur auf.

Die Ordnung des globalen Fehlers $\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}(t = t_i)\|$ des vorgestellten Verfahrens ist lediglich zwei ($\mathcal{O}(h^2)$) und damit für viele Anwendungen nicht ausreichend. Abhilfe schaffen in so einem Fall u.a. Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung, beispielsweise implizite Runge-Kutta-Verfahren, die die Auswertung der rechten Seite $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ an zusätzlichen, inneren Punkten des Teilintervalls $[t_i, t_{i+1}]$ erfordern. Eine besondere Klasse dieser Verfahren stellen die Kollokationsmethoden dar. Abhängig vom gewählten Diskretisierungsverfahren führen solche Methoden meist auf sehr große algebraische nichtlineare Gleichungssysteme mit dünn besetzter Block-Jacobimatrix.

Wesentlich für eine erfolgreiche Anwendung sowohl der Finite-Differenzen-Verfahren als auch des Mehrfachschießverfahrens ist die Bestimmung eines geeigneten Gitters π . Besonders erstere erlauben bei Verwendung bestimmter symmetrischer Diskretisierungsschemata eine im Hinblick auf Effizienz und Qualität der Lösung vergleichbare Bestimmung sowohl stabil als auch instabil periodischer Lösungen. Im Allgemeinen reagieren Finite-Differenzen-Verfahren weniger sensitiv auf die Startwerte der Iteration als die Schießverfahren, [ParkerChua89, NayfehBalachandran95], sie sind also zur Bestimmung instabiler Lösungen besser geeignet. Als Nachteil gilt allerdings die im Vergleich zu den Schießverfahren erschwerte Handhabung von Unstetigkeiten. Implementiert sind solche

Methoden z.B. in dem Programmsystem AUTO, [DoedelKellerKernez91], das sich einer weit verbreiteten Anwendung erfreut, und in COLNEW/COLDAE, [AscherSpiteri94], wobei letztere allerdings Softwarepakete zur Lösung allgemeiner Randwertprobleme darstellen. In [Franke98] wird die Erweiterung eines Kollokationsverfahrens auf die umfassendere Klasse differentiell–algebraischer Gleichungssysteme (2.2) beschrieben.

4.1.3 Frequenzbereichsverfahren: Harmonische Balance

Im Rahmen des Verfahrens der Harmonischen Balance wird versucht, eine periodische Lösung $\mathbf{y}_p(t)$ der Differentialgleichung (4.1) im Frequenzbereich direkt mit Hilfe einer Fourierreihe anzunähern, wobei die Reihenentwicklung nach endlich vielen Gliedern abgebrochen wird, [ParkerChua89]. Grundlage ist ein harmonischer Lösungsansatz der Ordnung N mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T_P$,

$$\mathbf{y}(t) := \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^N (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) ; \quad (4.7)$$

die Definition der Fourierkoeffizienten (auch als Beschreibungsfunktionen bezeichnet) $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N$ kann z.B. [BronsteinSemendjajew85] entnommen werden. Wird ein analoger Ansatz auch für die rechte Seite der Differentialgleichung (4.1) eingeführt,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) := \frac{\bar{\mathbf{a}}_0}{2} + \sum_{k=1}^N (\bar{\mathbf{a}}_k \cos(k\omega t) + \bar{\mathbf{b}}_k \sin(k\omega t)) , \quad (4.8)$$

lassen sich dessen Fourierkoeffizienten als nichtlineare Funktionen der Koeffizienten des Lösungsansatzes (4.7) darstellen:

$$\bar{\mathbf{a}}_0 = \bar{\mathbf{a}}_0(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) , \quad \bar{\mathbf{a}}_k = \bar{\mathbf{a}}_k(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) , \quad \bar{\mathbf{b}}_k = \bar{\mathbf{b}}_k(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) , \quad k = 1, \dots, N .$$

Die Ansatzfunktionen (4.7) nach der Zeit differenziert und gemeinsam mit dem zweiten Ansatz (4.8) in die Differentialgleichung (4.1) eingesetzt ermöglichen dann einen Koeffizientenvergleich bezüglich der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \bar{\mathbf{a}}_0(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ k\omega \mathbf{b}_k &= \bar{\mathbf{a}}_k(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ -k\omega \mathbf{a}_k &= \bar{\mathbf{b}}_k(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) . \end{aligned}$$

Damit erhält man aber aus dem Differentialgleichungssystem im Zeitbereich ein nichtlineares Gleichungssystem im Frequenzbereich, bestehend aus insgesamt $(2N+1)n$ Gleichungen in ebenso vielen unbekannten Fourierkoeffizienten $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N$, welches wieder mittels einer Newton–Iteration gelöst werden kann. Allerdings sind für die Auswertung der Funktionen $\bar{\mathbf{a}}_0, \bar{\mathbf{a}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k$ drei Schritte notwendig: (1) Inverse Fouriertransformation ($\mathbf{a}_k, \dots \rightarrow \mathbf{y}_k(t)$), (2) Auswertung der rechten Seite ($\boldsymbol{\zeta}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_k(t))$) und (3) Fouriertransformation ($\boldsymbol{\zeta}_k(t) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}_k, \dots$).

Wird die rechte Seite $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ in (4.1) durch ihre Fourierreihe (4.8) unter Beachtung der gefundenen Koeffizienten $\bar{\mathbf{a}}_0, \bar{\mathbf{a}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k$ ersetzt, ergibt sich eine quasilineare Differentialgleichung

$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^*$ in $x_i^* = x_{0,i} + A_i \sin(\omega t + \varphi_i)$ (dargestellt nur für $k=1$). Aus diesem Grund wird die Harmonische Balance auch zu den Methoden der *Quasilinearisierung* gezählt, eine gängige Bezeichnung ist auch „Variationsmethode nach GALERKIN“.

Die Einhaltung definierter Genauigkeitsanforderungen durch Bestimmung einer maximalen Ordnung N_{\max} stellt bei Anwendung der Harmonischen Balance ein gewisses Problem dar; eine Abschätzung des Fehlers durch Betrachtung zusätzlicher Oberschwingungen mit $N > N_{\max}$ ist nur im Falle analytischer Funktionen möglich. Um den erforderlichen Rechenaufwand klein zu halten, findet bei der Reihenentwicklung oftmals eine Beschränkung auf einige wenige Fourierkoeffizienten oder gar die erste Grundharmonische statt ($N=1$). Solange die zu erwartende Lösung einer trigonometrischen Funktion ähnelt, sollten sich auch für kleine N brauchbare Lösungen ergeben.

4.2 Die Methode der Poincaré–Abbildung

Die Methode der Poincaré–Abbildung ist ein spezielles Einzelschießverfahren zur direkten Bestimmung ein- und mehrfach-periodischer, sowohl stabiler wie auch instabiler Lösungen dynamischer Systeme. Die Grundidee dabei ist, anstatt einer periodischen Lösung eines zeitkontinuierlichen Systems nur einen Fixpunkt einer äquivalenten, zeitdiskreten *Poincaré–Abbildung* zu bestimmen. Ein solcher Fixpunkt repräsentiert gleichzeitig auch einen Anfangspunkt einer periodischen Trajektorie. Allgemeinere Erläuterungen hierzu sind in [ParkerChua89, NayfehBalachandran95] zu finden, im Folgenden wird der in PATH implementierte Algorithmus beschrieben, [Kaas-Petersen86, Kaas-Petersen87].

Eine *Poincaré–Ebene* des autonomen dynamischen Systems (4.1) ist eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene im n -dimensionalen Zustandsraum transversal zum Fluss $\varphi(t, \mathbf{s})$ des Systems, $\mathbf{s} := \mathbf{y}_0$,

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) \neq 0 ,$$

wobei $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ den Normalenvektor der Hyperebene im Punkt \mathbf{y} beschreibt. Zugleich muss der Fluss diese Hyperebene immer in derselben Richtung schneiden.

Sei Σ eine Poincaré–Ebene des Systems (4.1), dann muss eine periodische Trajektorie ausgehend von einem Anfangspunkt $\mathbf{s}_p \in \Sigma$ die Ebene Σ in eben diesem Punkt \mathbf{s}_p nach Ablauf der Periode T_P zum ersten mal wieder schneiden,

$$\mathbf{s}_p = \varphi(T_P, \mathbf{s}_p) ,$$

siehe Abb. 4.1. Definiert man nun eine Hyperebene Σ durch einen Punkt \mathbf{y}_Σ in der Nähe einer periodischen Lösung sowie einen zugehörigen normierten Normalenvektor \mathbf{n}_Σ parallel zum Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{f}(\mathbf{y}_\Sigma)$ des Systems, wird die Trajektorie $\varphi(t, \mathbf{s})$ ausgehend von einem Anfangspunkt $\mathbf{s} \in \Sigma$ nach einer gewissen Zeit $T_R(\mathbf{s}) \neq T_P$ wiederum auf Σ (zum ersten Mal und in der gleichen Orientierung wie \mathbf{n}_Σ) auftreffen, $\mathbf{w} := \varphi(T_R, \mathbf{s}) \in \Sigma$. Praktischerweise wird man $\mathbf{y}_\Sigma \equiv \mathbf{s}$ wählen, auf die indirekte gleichzeitige Bestimmung der a priori unbekannten Zeit T_R wird unten eingegangen. Die *Poincaré–Abbildung* $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ ist dann als *zeitdiskrete* Abbildung $\mathbf{P}: \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{w}$ definiert:

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) := \varphi(T_R(\mathbf{s}), \mathbf{s}) . \quad (4.9)$$

Da sowohl der Anfangspunkt \mathbf{s} als auch der Endpunkt \mathbf{w} nach Definition in der $(n-1)$ –dimensionalen Poincaré–Ebene Σ liegen müssen, $\mathbf{s}, \mathbf{w} \in \Sigma$, stellt auch die Poincaré–Abbildung $\mathbf{P} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ eine lediglich $(n-1)$ –dimensionale Abbildung dar. Für eine periodische Trajektorie gilt

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}_p) \equiv \mathbf{s}_p .$$

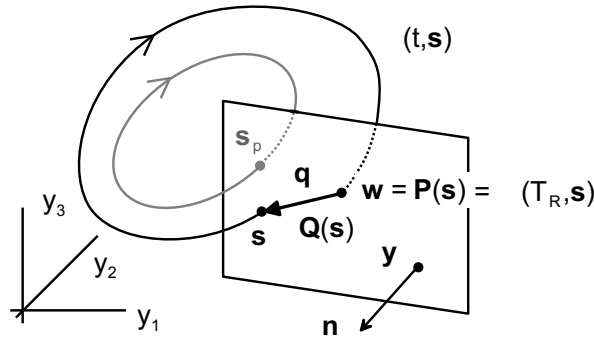


Abbildung 4.1: Definition von Poincaré–Ebene, Poincaré–Abbildung und Residuenabbildung für den Fluss $\varphi(t, \mathbf{s})$ des Systems (4.1), skizziert im Anschauungsraum \mathbb{R}^3 .

Die in das erweiterte Randwertproblem (4.5) eingeführte skalare Phasenbedingung $u(\mathbf{s}) = 0$ kann oftmals auch als Poincaré–Ebene des Flusses interpretiert werden, Beispiele sind $u(\mathbf{s}) := f_k(\mathbf{s})$ oder $u(\mathbf{s}) := s_k - s_k^0$ mit $s_k^0 = \text{konst.}$ und beliebigem $k \in [1; n]$. Deutlich wird jetzt die der Auswahl einer geeigneten Phasenbedingung inhärente Problematik: Die Auswahl ist keineswegs eindeutig, es kann durchaus vorkommen, dass die gesuchte periodische Lösung die a priori festgelegte Poincaré–Ebene nicht schneidet – und folglich keine Lösung des RWP gefunden wird, siehe hierzu auch [WulffHohmannnDeuffhard94].

Beschreibt \mathbf{q} den Differenzvektor in der Ebene Σ zwischen Ausgangs– und Zielpunkt einer Abbildung,

$$\mathbf{q} := \mathbf{w} - \mathbf{s} = \varphi(T_R, \mathbf{s}) - \mathbf{s} , \quad \mathbf{q} \in \Sigma ,$$

kann man eine diskrete Residuenabbildung \mathbf{Q} definieren,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) := \mathbf{P}(\mathbf{s}) - \mathbf{s} \quad (=: \mathbf{q}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} : \Sigma \rightarrow \Sigma , \quad (4.10)$$

die eine direkte Abbildung eines beliebigen Punktes in Σ in einen Vektor in Σ darstellt. Ein Fixpunkt der Poincaré–Abbildung $\mathbf{P}(\mathbf{s})$, der eine periodische Trajektorie des dynamischen Systems repräsentiert, ergibt sich dann als Nullstelle der Residuenabbildung,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}_p) = \varphi(T_P, \mathbf{s}_p) - \mathbf{s}_p = \mathbf{0} . \quad (4.11)$$

Unter der Annahme, dass \mathbf{s} eine ausreichend gute Näherung des Fixpunktes \mathbf{s}_p darstellt, kann das $(n-1)$ –dimensionale Gleichungssystem $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$ durch eine Newton–Iteration gelöst werden. Diese Iteration findet ausschließlich in der $(n-1)$ –dimensionalen Hyperebene Σ statt.

Das wesentliche Element einer Newton–Iteration für Gleichung (4.11) ist die Jacobimatrix $\mathbf{Q}_s = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{s}$. Zu deren Approximation wird zunächst die Poincaré–Ebene $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ eindeutig durch den Punkt \mathbf{y}_Σ und eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_\Sigma := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ orthogonal

zum Normalenvektor \mathbf{n}_Σ beschrieben (dabei gelte für alle $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{\bar{k}} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{e}_k^T \cdot \mathbf{e}_{\bar{k}} = \delta_{k\bar{k}}$ mit $k, \bar{k} = 1, \dots, n-1$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{k\bar{k}}$),

$$\Sigma := \{\mathbf{y}_\Sigma; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}\}.$$

Durch die Berechnung der Richtungsableitungen von \mathbf{Q} bezüglich der Basis \mathcal{B}_Σ über Störungen in Richtung der Einheitsvektoren von Σ wird dann die $(n-1) \times (n-1)$ -Iterationsmatrix $\mathbf{Q}_s =: \mathbf{Q}_s^\Sigma$ spaltenweise durch finite Differenzen ($\hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{s}, \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{Q} \in \Sigma$)

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^\Sigma}{\partial s_k} \approx \frac{\overbrace{\mathbf{B}_\Sigma^T \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{s} + \Delta \cdot \mathbf{e}_k)}^{\mathbf{Q}(\mathbf{s} + \Delta \cdot \mathbf{e}_k)} - \overbrace{\mathbf{B}_\Sigma^T \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{s})}^{\mathbf{Q}(\mathbf{s})}}{\Delta}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad 0 < \Delta \ll 1 \quad (4.12)$$

approximiert. Dabei ist zu beachten, dass zur Berechnung sowohl der nominellen als auch der gestörten Residuenabbildungen zunächst der Fluss $\boldsymbol{\varphi}(T_R, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^n$ per Zeitintegration bestimmt werden muss. Daraus folgt dann die Residuenabbildung $\hat{\mathbf{Q}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die mit

$$\mathbf{Q}_\Sigma := \mathbf{Q} = \mathbf{B}_\Sigma^T \cdot \hat{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{Q} \in \Sigma, \quad \hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.13)$$

in die Poincaré-Ebene Σ projiziert werden kann; die dazu erforderliche orthogonale $(n \times (n-1))$ -Projektionsmatrix \mathbf{B}_Σ erhält man spaltenweise direkt aus den $(n-1)$ Einheitsvektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ der Orthonormalbasis \mathcal{B}_Σ ,

$$\mathbf{B}_\Sigma = [\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \dots \mid \mathbf{e}_{n-1}]. \quad (4.14)$$

Da somit aber wie gefordert die Iteration auf die Poincaré-Ebene beschränkt ist, muss vor der Inkrementierung des Anfangszustandes \mathbf{s}^l für den nächsten Iterationsschritt das Resultat der Korrektorgleichung $\mathbf{Q}_s^{\Sigma, l} \cdot \Delta \mathbf{s}_\Sigma^l = -\mathbf{Q}_\Sigma^l$, das Inkrement $\Delta \mathbf{s}_\Sigma^l$ also, wieder rückprojiziert werden,

$$\Delta \mathbf{s}^l = \mathbf{B}_\Sigma \cdot \Delta \mathbf{s}_\Sigma^l, \quad \Delta \mathbf{s}_\Sigma^l \in \Sigma, \quad \Delta \mathbf{s}_l \in \mathbb{R}^n.$$

Bei Einbettung in den in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Fortsetzungsalgorithmus von PATH muss obige Methodik zur Korrekturiteration auf den Zustands-Parameter-Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ erweitert werden. Dabei wird auch hier wieder die Suchrichtung der Iteration auf eine Hyperebene H *orthogonal* zu der Tangente \mathbf{t} an den Pfad im \mathbb{R}^{n+1} beschränkt. Die Iteration findet also insgesamt gesehen auf einer Poincaré-Pfad-Ebene statt, charakterisiert durch Orthogonalität sowohl zum Normalenvektor \mathbf{n}_Σ als auch zur normierten Pfadtangente (3.4), $\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}/\|\mathbf{t}\|$. Hierzu wird zunächst ein erweitertes Orthonormalsystem

$$\left\{ \mathbf{n}_\Sigma \mid \mathbf{t}^1 \mid \underbrace{\mathbf{h}_1^\Sigma, \dots, \mathbf{h}_{n-1}^\Sigma}_{=: \mathcal{B}_{H, \Sigma}} \right\}$$

mit $\mathbf{n}_\Sigma \perp \mathbf{t}^1 \perp \{\mathbf{h}_k^\Sigma\}$ und $\mathbf{h}_k^{\Sigma^T} \cdot \mathbf{h}_{\bar{k}}^\Sigma = \delta_{k\bar{k}}$, $k, \bar{k} = 1, \dots, n-1$, $\mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{t}^1, \mathbf{h}_k^\Sigma \in \mathbb{R}^{n+1}$ gebildet. Die $((n-1) \times (n-1))$ -Iterationsmatrix $\mathbf{Q}_s =: \mathbf{Q}_s^{H, \Sigma}$ folgt dann aus den Richtungsableitungen bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{H, \Sigma}$ analog zum Differenzenschema (4.12). Neben der

Projektion (4.13) mit der Matrix \mathbf{B}_Σ zur Bestimmung des Residuenvektors $\mathbf{Q}_\Sigma(\mathbf{s})$ und damit des Inkrements in der Poincaré–Ebene, sind zum Verbleib der Iteration auf der kombinierten Poincaré–Pfad–Ebene jetzt auch Projektionen mit der erweiterten Orthogonalmatrix $\mathbf{B}_{H,\Sigma} := [\mathbf{h}_1^\Sigma \mid \dots \mid \mathbf{h}_{n-1}^\Sigma]$ erforderlich.

Die Pfadverfolgung ermöglicht aber auch eine einfache Wahl des die Poincaré–Ebene im Verfolgungsschritt j definierenden Punktes \mathbf{y}_Σ^j , siehe Abb. 4.1. Dieser wird einfach mit dem im vorangehenden Schritt $j-1$ errechneten Anfangspunkt \mathbf{s}_p^{j-1} einer periodischen Lösung identifiziert,

$$\mathbf{y}_\Sigma^j \equiv \mathbf{s}_p^{j-1}, \quad \mathbf{s}_p^{j-1} = \boldsymbol{\varphi}_p^{j-1}(T_P^{j-1}, \mathbf{s}_p^{j-1}).$$

Der Normalenvektor ergibt sich dann aus $\mathbf{n}_\Sigma^j = \mathbf{f}(\mathbf{s}_p^{j-1})$.

Zur Stabilitätsbetrachtung eines Fixpunktes wird die Definitionsgleichung (4.10) der Residuenabbildung für den Fixpunkt \mathbf{s}_p formal nach der Poincaré–Abbildung aufgelöst und bezüglich der Startpunkte \mathbf{s} differenziert (\mathbf{I} ist die $((n-1) \times (n-1))$ –Einheitsmatrix),

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{s}_p)}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{s}_p)}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{I}.$$

Nun lässt sich aber nach [Seydel94] zeigen, dass die $n-1$ Eigenwerte der Matrix $\mathbf{P}_s(\mathbf{s}_p)$ ($\mathbf{P}: \Sigma \rightarrow \Sigma$) identisch den n Eigenwerten $\mu_i, i=1, \dots, n$ der in Abschnitt 3.2.3 eingeführten Monodromiematrix \mathbf{M} (3.8) sind – abgesehen von dem dort stets auftretenden Eigenwert $\mu=1.0$. Ausgehend von der Iterations– oder Jacobimatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{s}_p}^{H,\Sigma}$ kann also die Stabilität eines Fixpunktes \mathbf{s}_p (und damit der periodischen Trajektorie $\boldsymbol{\varphi}_p(t, \mathbf{s}_p)$) ohne bedeutenden Zusatzaufwand bewertet werden.

Zur Bestimmung der Poincaré–Abbildung (4.9) muss der Fluss $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s})$ bis zum Zeitpunkt $t = T_R(\mathbf{s})$ ausgewertet werden. Dieser Zeitpunkt ist jedoch a priori nicht bekannt. Zu seiner indirekten Bestimmung kann auf der Grundlage einer weiteren Definition der Poincaré–Ebene Σ (siehe auch Abb. 4.1),

$$\Sigma : \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{w} - \mathbf{y}_\Sigma)^T \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \}, \quad (4.15)$$

eine skalare Testfunktion $\Theta_\Sigma(t, \mathbf{s})$ mit

$$\Theta_\Sigma(t, \mathbf{s}) := (\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s}) - \mathbf{y}_\Sigma)^T \cdot \mathbf{n}_\Sigma \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.16)$$

eingeführt werden. Ist die Bedingung (4.16) innerhalb definierter Genauigkeitsanforderungen erfüllt (wobei die Orientierung bezüglich der Normalen \mathbf{n}_Σ zu beachten ist), liegt der aktuelle Lösungspunkt in der Poincaré–Ebene, $\boldsymbol{\varphi}(t=T_R, \mathbf{s}) \in \Sigma$, und die Rückkehrzeit $T_R(\mathbf{s})$ ist eindeutig bestimmt. Im Falle eines Fixpunktes der Poincaré–Abbildung ergibt sich die Periode $T_P \equiv T_R$.

Wird die Bedingung (4.16) in jedem Integrationsschritt ausgewertet, ist lediglich ein Vorzeichenwechsel der Testfunktion detektierbar. Zur Einhaltung definierter Genauigkeitsanforderungen ist ein weiterer Iterationsalgorithmus bezüglich T_R erforderlich, wie er beispielsweise in [Kaas-Petersen87] beschrieben wird. Im Rahmen einer Pfadverfolgung erübrigt sich dann die Auswertung der Testfunktion $\Theta_\Sigma(t, \mathbf{s})$ in jedem Integrationsschritt, als Anfangsschätzung für T_R kann die Periode des letzten Fortsetzungsschritts bzw. das T_R des letzten Newton–Schritts verwendet werden.

Abgrenzung und Kritik des Verfahrens

Die Methode der Poincaré–Abbildung ist ein diskretes Verfahren, das einen Fixpunkt einer Punktabbildung bestimmt. Demgegenüber wird mit Hilfe des allgemeinen Einfachschießverfahrens ein Anfangszustand einer kontinuierlichen, periodischen Trajektorie gesucht. Bei vergleichbarer Phasenbedingung des Schießverfahrens (der Orthogonalitätsbedingung $\mathbf{f}^T(\mathbf{s}) \cdot \Delta \mathbf{y} = 0$) ändert sich die mögliche Iterationsebene in jedem Iterationsschritt j mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}^j)$, wohingegen die durch $\mathbf{f}^T(\mathbf{y}_\Sigma) \cdot \Delta \mathbf{s} = 0$ einmal festgelegte Poincaré–bzw. Iterations–Ebene während der gesamten Iteration erhalten bleibt.

Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht in der Bestimmung der Periode T_P . Bei den gewöhnlichen Schießverfahren wird diese als unabhängige Variable angesehen und ausgehend von einer Anfangsschätzung T_P^0 gleichzeitig mit dem gesuchten Anfangswert einer periodischen Lösung \mathbf{s}_p iterativ bestimmt. Damit ist zwar die Integrationszeit in jedem Iterationsschritt vorgegeben, allerdings wird in [ParkerChua89, Meijaard91] darauf hingewiesen, dass, auch wenn \mathbf{s}^0 in der Nähe oder gar bereits auf dem Grenzzyklus liegt, eine schlechte Anfangsschätzung T_P^0 die Konvergenz des Verfahrens verhindern kann. Allgemein dürfte eine gute Schätzung für T_P^0 als kritischer zu bewerten sein als für \mathbf{s}^0 . Der Vorteil der Poincaré–Methode ist nun, dass die Rückkehrzeit T_R sich mittels der Bedingung (4.16) ausgehend von einer Schätzung in einer unabhängigen Iterationsschleife jeweils ergibt. Diese Iteration bedeutet meist nur einen geringen Mehraufwand für die Integration.

Ebenfalls ein Vorteil ist in der Stabilitätsbeurteilung zu finden. Bei Anwendung der Poincaré–Methodik ergeben sich die Floquet–Multiplikatoren als die $n - 1$ Eigenwerte der Jacobimatrix $\mathbf{P}_s(\mathbf{s}_p)$. Damit entfällt aber die Bestimmung des 1.0–Eigenwertes, die insbesondere in der Nähe einer Sattelpunktverzweigung (siehe Abschnitt 3.2.4; $\mu = 1.0$ ist zweifacher Eigenwert) problematisch sein kann.

In Anbetracht dieser Auflistung sowie bei Berücksichtigung der zu Beginn des Kapitels aufgestellten Annahmen (ausreichend gutes \mathbf{s}^0 vorhanden und T_P klein, siehe S. 58) erscheint die Anwendung von PATH zur Verfolgung stationärer und periodischer Lösungen realistischer Modelle von Schienenfahrzeugen gerechtfertigt. Darüber hinaus wurde dieses Programm zur Analyse von Rad–Schiene–Systemen bereits häufig eingesetzt, siehe z.B. [Kaas-Petersen86, KnudsenFeldbergJaschinski91, IsaksenTrue97]. Diesen Anwendungen gemein (und nicht nur diesen, sondern fast allen, die keinen Brute–Force–Ansatz verwenden) ist jedoch eine starke Modellreduktion sowie die Beschränkung auf eine lineare Kontaktgeometrie zwischen Rad und Schiene. Insbesondere die Berücksichtigung der nichtlinearen Kontaktgeometrie, siehe Abb. 2.5, führt jedoch dazu, dass eine Fortsetzung oder auch nur die direkte Berechnung von Grenzzyklen mit PATH nicht mehr gelingt. Die Analyse sowie die Weiterentwicklung dieses Algorithmus zur Erfüllung der gestellten Simulationsaufgabe ist der Inhalt des nächsten Abschnitts.

4.3 Variationsdifferentialgleichungen zur robusten Bestimmung periodischer Lösungen

Das zentrale Element bei der direkten Berechnung periodischer Trajektorien durch Anwendung eines Schießverfahrens ist die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems der Form (der Einfachheit halber sei vorerst $\mathbf{Q}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ angenommen)

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) := \varphi(T_R, \mathbf{s}) - \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

mit Hilfe eines (modifizierten) Newton–Verfahrens

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{s}^l) \cdot \Delta \mathbf{s}^l = -\mathbf{Q}(\mathbf{s}^l) \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}^{l+1} = \mathbf{s}^l + \Delta \mathbf{s}^l. \quad (4.18)$$

Hierbei kommt der Berechnung der Jacobimatrix $\mathbf{Q}_s(\mathbf{s}) = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{s}$, des Gradienten bezüglich der Anfangsbedingungen, eine entscheidende Bedeutung zu. Bei den folgenden Überlegungen gilt es zu beachten, dass die System–Jacobimatrix \mathbf{f}_y der Systemgleichungen (4.1) unter den gegebenen Voraussetzungen analytisch nicht verfügbar ist. Wesentliche Gründe hierfür sind komplexe Simulationsmodelle und die Erzeugung deren Bewegungsgleichungen mit Hilfe eines allgemeinen MKS–Algorithmus. Prinzipiell käme zwar zur Berechnung von \mathbf{f}_y die Technik des „Automatischen Differenzierens“ [Griewank00] in Betracht. Tests an einfachen Referenzbeispielen haben jedoch gezeigt, dass die Komplexität leistungsfähiger Mehrkörper–Simulationswerkzeuge die softwaretechnischen Möglichkeiten der Hilfsmittel zur automatischen Differentiation derzeit noch bei weitem übersteigt.

Die Bestimmung von \mathbf{Q}_s muss also auf einer vollständig numerischen Basis erfolgen, mögliche Verfahren sind die Approximation durch *finite Differenzen* (numerische Differentiation) oder die Auswertung der *Variationsdifferentialgleichungen*. Die in [BestleSeybold92, Bestle94] beschriebene Methode der „Adjungierten Variablen“ zielt im Rahmen einer Parameteroptimierung speziell auf die Berechnung des Gradienten eines übergeordneten Optimierungskriteriums und soll hier nicht weiter betrachtet werden.

Eine numerische Differentiation ist zwar unter programmiertechnischen Gesichtspunkten sehr einfach umsetzbar, jedoch muss berücksichtigt werden, dass die Auswertung von $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$ die Integration der Bewegungsgleichungen (4.1) bedingt. Eine Fehleranalyse im nachfolgenden Abschnitt macht diese Problematik deutlich. Die geschickte Integration der Variationsdifferentialgleichungen vermeidet diese Fehlerquellen nicht nur, sondern resultiert meist auch in einer Verringerung des Rechenaufwandes. Ähnliche Problemstellungen der Gradientenberechnung treten auch bei der Parameteridentifikation und –optimierung auf, z.B. [Bestle94, Grupp96, Eich-SoellnerFührer98], wobei allerdings Gradienten in Bezug auf Systemparameter im Vordergrund stehen.

4.3.1 Problemanalyse bei Verwendung finiter Differenzen zur Gradientenberechnung

In PATH wird die Jacobimatrix \mathbf{Q}_s spaltenweise mittels finiter Vorwärtsdifferenzen (4.12) aufgebaut, wobei die Störung Δ geeignet vorzugeben ist. Entscheidend dabei ist, dass

nominelle und gestörte Trajektorien *unabhängig* voneinander integriert werden. Der Gesamtfehler dieser *externen numerischen Differentiation* ([SchulzBockSteinbach98]; die folgenden Aussagen beziehen sich stets auf die Spalte k von \mathbf{Q}_s) setzt sich im Wesentlichen aus dem Abbruchfehler ε_a und dem Integrationsfehler ε_i zusammen. Ersterer ergibt sich über die Taylorreihenentwicklung

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k) = \mathbf{Q}(\mathbf{s}) + \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s_k} \right|_{\mathbf{s}} \cdot \Delta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial s_k^2} \right|_{\mathbf{s}} \cdot \Delta^2 + \dots$$

aus den vernachlässigten Reihengliedern (bei geeignet gewählter Norm $\|\cdot\|$),

$$\varepsilon_a := \frac{1}{\Delta} \left\| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}(\mathbf{s})}{\partial s_k^2} \Delta^2 + \dots \right\|,$$

kann also mit $\varepsilon_a = \mathcal{O}(\Delta^2)/\Delta$ und damit als proportional zur Störung Δ abgeschätzt werden, $\varepsilon_a \sim \Delta$. Der Integrationsfehler ε_i resultiert aus der begrenzten Genauigkeit der numerischen Integration. Sei $\mathbf{Q}(\cdot)$ der exakte Wert einer Residuenabbildung und $\bar{\mathbf{Q}}(\cdot)$ der über eine unabhängige numerische Integration bei konstanter lokaler Integrationsgenauigkeit TOL berechnete, fehlerbehaftete Wert (Erläuterungen zu TOL in Anhang A). Für den exakten Differenzenquotienten gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k) - \mathbf{Q}(\mathbf{s})}{\Delta} &= \frac{\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k) - \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s})}{\Delta} + \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k) - \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k) - (\mathbf{Q}(\mathbf{s}) - \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s}))}{\Delta} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k) - \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s})}{\Delta} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{e}_k)}{\Delta} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})}{\Delta}}_{=:\varepsilon_i}, \end{aligned}$$

wobei die Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)$ weitestgehend durch die Integrationstoleranz TOL bestimmt sind. Aus der resultierenden Abschätzung $\varepsilon_i := \|\boldsymbol{\varepsilon}_i\| = \mathcal{O}(TOL)/\Delta$ für den Integrationsfehler folgt somit der Gesamtfehler der Differenzenapproximation (4.12) zu

$$\varepsilon_g \leq \varepsilon_i + \varepsilon_a = \frac{\mathcal{O}(TOL) + \mathcal{O}(\Delta^2)}{\Delta},$$

[Bock87]. Störung Δ und Integrationsgenauigkeit TOL können also nur gemeinsam festgelegt werden, als günstig wird in [BuchauerHiltmannKiehl94, Grupp96] die Minimalstelle von $(TOL + \Delta^2)/\Delta$ empfohlen³:

$$\Delta \sim \sqrt{TOL} \cdot s_k, \quad s_k \neq 0. \quad (4.19)$$

Aus der Approximation der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s ist dann für $\Delta = \mathcal{O}(\sqrt{TOL})$ ein Gesamtfehler

$$\varepsilon_g = \mathcal{O}(\sqrt{TOL}) \quad (4.20)$$

zu erwarten.

³In [Stoer99] wird zur Differenzenapproximation des Quotienten $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ einer analytischen Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ eine äquivalente Empfehlung für die geeignete Störung gegeben. Da der Fehler bei der Auswertung von \mathbf{f} allein durch die Maschinengenauigkeit ε_M bestimmt wird, ist $\Delta = \sqrt{\varepsilon_M} \cdot x_k$ als geeignet anzusehen.

Und damit ist jetzt auch das Dilemma bei der Festsetzung von Δ , TOL deutlich: Ein zu großes Δ bewirkt einen großen Abbruchfehler ε_a , der leicht eine mangelhafte oder gar keine Konvergenz der Iteration zur Folge hat. Bei zu kleinem Δ muss die Integrationstoleranz entsprechend klein gewählt werden, wodurch dann allerdings die Rechenzeit in starkem Maße zunimmt, siehe hierzu auch Abb. 4.2.

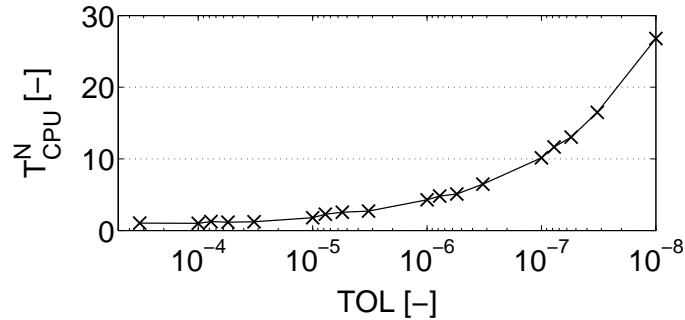


Abbildung 4.2: Vergleich normierter Rechenzeiten zur numerischen Integration des Reisezugwagenmodells aus Abschnitt 7.1.1. Bezugsgröße ist die Rechenzeit bei $TOL = 10^{-4}$.

In PATH ist die Skalierung der Störung Δ in (4.19) mit der aktuellen Zustandskomponente s_k nicht möglich, da durch die Berechnung der Richtungsableitungen (4.12) bezüglich der Basis \mathcal{B}_Σ bzw. $\mathcal{B}_{H,\Sigma}$ die eindeutige Zuordnung zu einer Systemkomponente verloren geht. Um den Gesamtfehler der Differenzenapproximation möglichst gering zu halten, wird in [Kaas-Petersen89] eine extrem kleine Integrationstoleranz anempfahlen, z.B. $TOL = 10^{-15}$; in vergleichbaren Fällen wird auch in [LustRooseSpenceChampneys98] zu einer sehr hohen Integrationsgenauigkeit geraten. Der Erfolg dieses pragmatischen Ansatzes wird in einer Vielzahl von Anwendungen bestätigt, [Kaas-Petersen86, KnudsenFeldbergJaschinski91, IsaksenTrue97, GalvanettoBriseghellaBishop97]. Wie Abb. 4.2 zeigt, ist diese Vorgehensweise jedoch im Falle aufwändiger bzw. großer Simulationsmodelle allein schon ob der hohen Rechenzeiten nicht mehr anwendbar. Dargestellt ist das Verhältnis der Rechenzeiten bei einer Zeitschrittintegration mit verschiedenen Toleranzen TOL zu der Rechenzeit bei $TOL = 10^{-4}$ – einem oft verwendeten Erfahrungswert bei Simulationen von Schienenfahrzeugen, deren Bewegungsgleichungen in der DAGL-Form (2.2) gegeben sind. Daneben sei noch darauf hingewiesen, dass in Integrationsalgorithmen normalerweise die Toleranz TOL nur zur Beschränkung des *lokalen* Integrationsfehlers herangezogen wird, wohingegen ε_i , ε_g *globale* Fehler darstellen. Es ist also u.U. auch das Problem einer Fehlerakkumulation zu beachten.

Ursache für die relativ geringe Genauigkeit (4.20) bei der unabhängigen Differenzenapproximation der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s ist, dass zur möglichst effizienten und sicheren Lösung von Differentialgleichungssystemen normalerweise Integrationsverfahren mit Schrittweiten- und Ordnungssteuerung verwendet werden, [DeuffhardBornemann94]. Damit bauen aber nominelle als auch gestörte Trajektorien auf unterschiedlichen Diskretisierungs- und Ordnungsschemata auf, [BuchauerHiltmannKiehl94, Eich-SoellnerFührer98], und die Differenzenquotienten nach (4.12) approximieren nicht die eigentliche Jacobimatrix \mathbf{Q}_s . Darüber hinaus ist bei der Berechnung der Spalten $\mathbf{Q}_{s,k}$ bei dieser Vorgehensweise deren Genauigkeit nicht kontrollierbar.

Es muss also sichergestellt werden, dass bei der Berechnung der nominellen und der gestörten Trajektorien ein und dieselbe Schrittweiten- und Ordnungsabfolge zur Anwendung kommt. Integrationsverfahren mit fester Schrittweite (und Ordnung) erfüllen zwar diese Forderung, um jedoch die unstrittigen Vorteile einer Schrittweitensteuerung nutzen zu können, sollte eher auf das Prinzip der „eingefrorenen Schrittweite“ zurückgegriffen werden. Dazu wird bei der Integration des nominellen Systems die Schrittweitenabfolge zunächst abgespeichert und bei der Integration der gestörten Systeme dann wieder verwendet. Eine nahe liegende indirekte Variante besteht darin, das nominelle und die n gestörten Systeme in einem „Hypersystem“ zusammenzufassen und dann alle $n + 1$ Trajektorien gemeinsam zu integrieren; letztere Variante kommt z.B. in [Grupp96] zur Anwendung. Diese *interne numerische Differentiation* ([SchulzBockSteinbach98]) bewirkt, dass anstatt der Differentialgleichung lediglich das resultierende Diskretisierungsschema abgeleitet wird. Störung Δ und Integrationsgenauigkeit TOL können dann prinzipiell unabhängig voneinander festgelegt werden, nach [BuchauerHiltmannKiehl94] ergibt sich für den Gesamtfehler der Differenzenapproximation bei $\Delta = TOL$ näherungsweise die Genauigkeit $\varepsilon_g = \mathcal{O}(TOL)$.

Oder aber man verzichtet auf eine numerische Differenzenapproximation und berechnet \mathbf{Q}_s direkt auf der Grundlage der *Variationsdifferentialgleichungen* (Sensitivitätsgleichungen). Diese oder ähnliche Vorgehensweisen sind zwar beispielsweise auch in [HolodniokKubicek84, Meijaard91, NayfehBalachandran95] beschrieben, jedoch sind dort die Variationsdifferentialgleichungen explizit vorzugeben. Im Gegensatz dazu besteht eine der Besonderheiten des im Weiteren zu entwickelnden Verfahrens darin, dass die Variationsdifferentialgleichungen ähnlich beispielsweise wie in [FeeryTolsmaBarton97, MalyPetzold96] erst im Rahmen der Integration der Systemgleichungen intern numerisch aufgebaut und gelöst werden. Der Gesamtfehler der Approximation der Jacobi-matrix \mathbf{Q}_s ergibt sich dann ebenfalls in der Größenordnung der Integrationsgenauigkeit, $\varepsilon_g = \mathcal{O}(TOL)$.

4.3.2 Schießverfahren mit integrierter Sensitivitätsanalyse

Zur Bestimmung einer periodischen Lösung mit Hilfe eines Einfachschießverfahrens gilt es, das nichtlineare Gleichungssystem (4.17) mit Hilfe einer Newton-Iteration (4.18) zu lösen. Ein besonderes Merkmal der diskreten Abbildung $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$ ist die Abhängigkeit vom Fluss $\varphi(t, \mathbf{s})$ des Anfangswertproblems (4.1), $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{s}$, zum Zeitpunkt $t = T_R(\mathbf{s})$, also von der Poincaré-Abbildung $\mathbf{P}(\mathbf{s})$. Darüber hinaus hängt auch noch die Rückkehrzeit (in die Poincaré-Ebene) von den Anfangsbedingungen \mathbf{s} ab, $T_R = T_R(\mathbf{s})$. Die Rückkehrzeit wird hier indirekt durch Auswertung der Testfunktion (4.16) im Ablauf der Integration der Trajektorie $\varphi(t, \mathbf{s})$ bestimmt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass es sich bei der Residuenabbildung $\mathbf{Q} \in \Sigma$ eigentlich um eine zeitdiskrete Abbildung in der Poincaré-Ebene handelt, $\mathbf{Q} : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Das Verfahren basiert jedoch zunächst auf einer Analyse der Residuenabbildung im vollständigen Zustandsraum \mathbb{R}^n , die in Abschnitt 4.2 eingeführte Unterscheidung in $\mathbf{Q} \in \Sigma^{n-1}$ und $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^n$ soll hier vorerst vernachlässigt werden. Auch bleibt die Kennzeichnung „ l “ des Iterationsschrittes unberücksichtigt.

Die Grundidee ist, anstatt die Jacobi- oder Iterationsmatrix \mathbf{Q}_s mittels finiter Differenzen anzunähern, diese analytisch in solche Terme zu zerlegen, die sich als Lösung eines

Differentialgleichungssystem, also *ohne* Differenzenapproximation, berechnen lassen. Die Ableitung von $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$ aus (4.17) nach den Anfangswerten \mathbf{s} ergibt

$$\mathbf{Q}_s := \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \underbrace{\frac{\partial \varphi(T_R(\mathbf{s}), \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}}_{=: \mathbf{S}(T_R, \mathbf{s})} + \underbrace{\frac{\partial \varphi(T_R(\mathbf{s}), \mathbf{s})}{\partial T_R}}_{\mathbf{f}(\mathbf{y}(T_R, \mathbf{s}))} \cdot \frac{\partial T_R(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}}}_{\mathbf{I}}. \quad (4.21)$$

Die einzelnen Bestandteile werden nun analysiert und hergeleitet, von besonderem Interesse ist dabei die $(n \times n)$ -Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(T_R, \mathbf{s})$ sowie der $(1 \times n)$ -Vektor $\partial T_R / \partial \mathbf{s}$; \mathbf{I} ist die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Der Fluss $\varphi(t, \mathbf{s})$ beschreibt die durch den Anfangspunkt $\mathbf{s} := \mathbf{y}_0$ eindeutig bestimmte Lösung des GDGL-Systems (4.1): $\varphi(t, \mathbf{s}) := \mathbf{y}(t, \mathbf{s})$. Wird nun dieses GDGL-System ebenfalls vollständig (d.h. auch die Anfangsbedingungen) bezüglich \mathbf{s} differenziert,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}(t, \mathbf{s})) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}}(t_0 = 0) = \mathbf{I}, \quad (4.22)$$

erhält man eine *lineare* Matrixdifferentialgleichung für die unbekannte Sensitivitätsmatrix der Dimension $(n \times n)$,

$$\dot{\mathbf{S}}(t, \mathbf{s}) := \frac{\partial \mathbf{y}(t, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} : \quad (4.23)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}(t, \mathbf{s})) \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}(t_0 = 0) = \mathbf{I}. \quad (4.24)$$

Diese insgesamt $n \cdot n$ Differentialgleichungen für ebenso viele *Sensitivitäten* bezüglich der Anfangsbedingungen \mathbf{s} , $S_{i,j} := \partial y_i / \partial s_j$, $i, j = 1, \dots, n$, werden auch als *Variationsdifferentialgleichungen* (VDGL) bezeichnet. Neben den Sensitivitäten (4.23) wird in Abschnitt 4.3.5 (vergleichbar bestimmten Verfahren der Parameteroptimierung) auch noch die Sensitivität $\partial \mathbf{y} / \partial p$ bezüglich des Systemparameters p betrachtet, die zu (4.24) analogen Gleichungen sollen in diesem Fall als *Sensitivitätsgleichungen* bezeichnet werden.

Wie man leicht sehen kann, stellt also die Sensitivitätsmatrix als Lösung der VDGL (4.24) zum Zeitpunkt $t = T_R$ genau den gesuchten ersten Term der Gleichung (4.21) dar,

$$\mathbf{S}(T_R, \mathbf{s}) \equiv \frac{\partial \mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}.$$

Gehört des Weiteren die Anfangsbedingung \mathbf{s} zu einer periodischen Lösung \mathbf{y}_p , $\mathbf{s} = \mathbf{s}_p \in \mathbf{y}_p$, ergibt die Sensitivitätsmatrix ausgewertet für die Periode $t = T_p$ die in Abschnitt 3.2.3 zur Stabilitätsanalyse eingeführte Monodromiematrix (3.8),

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{S}(T_p, \mathbf{s}_p) \equiv \frac{\partial \mathbf{y}(T_p, \mathbf{s}_p)}{\partial \mathbf{s}}.$$

Dazu verdeutlicht die Reihenentwicklung einer Lösung von (4.1) bei gestörten Anfangsbedingungen $\mathbf{s} = \mathbf{s}^* + \Delta \mathbf{s}$, $\mathbf{y}(t, \mathbf{s}^* + \Delta \mathbf{s}) = \mathbf{y}(t, \mathbf{s}^*) + \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{s}|_{(t, \mathbf{s}^*)} \Delta \mathbf{s} + \dots$, dass die Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t) = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{s}$ die Reaktion der Lösung $\mathbf{y}(t, \mathbf{s}^*)$ auf kleine Störungen der Anfangsbedingungen („Sensitivität“) und damit im Falle von $\mathbf{s}^* \equiv \mathbf{s}_p$ die Monodromiematrix $\mathbf{M} \equiv \mathbf{S}(T_p, \mathbf{s}_p)$ die Stabilität periodischer Lösungen \mathbf{y}_p beschreibt.

Das bedeutet zum einen, dass vergleichbar der in Abschnitt 4.2 beschriebenen ursprünglichen Methode der Poincaré–Abbildung die Stabilitätsanalyse keinen Zusatzaufwand zur Berechnung der Monodromiematrix erfordert. Zum anderen kann der 1.0–Eigenwert der Monodromiematrix (siehe Abschnitt 3.2.3) als einfache Testfunktion zur Beurteilung der „Qualität“ der Floquet–Multiplikatoren verwendet werden: Kann für *kein* $i \in [1, \dots, n]$ ein Eigenwert $\mu_i \in \mathbb{C}$ von \mathbf{M} mit

$$|\operatorname{Re}(\mu_i) - 1.0| < \varepsilon_{\mu,r} \quad \wedge \quad |\operatorname{Im}(\mu_i)| < \varepsilon_{\mu,i} \quad (4.25)$$

bei geeignet kleinen $\varepsilon_{\mu,r}, \varepsilon_{\mu,i}$ gefunden werden, ist die Stabilitätsbeurteilung auf der Basis der Floquet–Multiplikatoren nicht verlässlich; eine verbesserte Nominallösung $\mathbf{y}_p(t, \mathbf{s})$ lässt in einem solchen Fall aber eine „bessere“ Monodromiematrix erwarten.

Der erste Term des zweiten Summanden in (4.21) erfordert lediglich die Auswertung der rechten Seite des GDGL–Systems (4.1) für $t = T_R$,

$$\frac{\partial \varphi(T_R, \mathbf{s})}{\partial T_R} = \frac{\partial \mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})}{\partial T_R} = \dot{\mathbf{y}}(T_R, \mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})) . \quad (4.26)$$

Die Berechnung des zweiten Terms dieses Produktes, die partielle Ableitung der Rückkehrzeit nach dem Anfangszustand, hängt von der jeweiligen Definition der Poincaré–Ebene Σ ab; hier soll nur die in Abschnitt 4.2 eingeführte Poincaré–Ebene betrachtet werden. Der Orthogonalitätsbedingung (4.15) folgend, schneidet eine Trajektorie genau dann die Ebene Σ , wenn

$$(\mathbf{y}(T_R, \mathbf{s}) - \mathbf{y}_\Sigma)^T \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad (4.27)$$

erfüllt ist. Da nun $\mathbf{y}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma$ während eines Verfolgungsschrittes konstant sind, reduziert sich diese Forderung mit der Projektion $\mathbf{y}_\Sigma^T \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \xi = \text{konst.}$ auf

$$\mathbf{n}_\Sigma^T \cdot \mathbf{y}(T_R(\mathbf{s}), \mathbf{s}) = \xi .$$

Differentiation bezüglich der Anfangswerte \mathbf{s} ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\Sigma^T \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})}{\partial T_R} \cdot \frac{\partial T_R(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \right] &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{n}_\Sigma^T \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})}{\partial T_R}}_{\mathbf{f}(\mathbf{y}(T_R, \mathbf{s}))} \right) \cdot \frac{\partial T_R(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} &= - \mathbf{n}_\Sigma^T \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}}_{\mathbf{S}(T_R, \mathbf{s})} \end{aligned}$$

und schließlich (die Klammer deutet ein Skalarprodukt an)

$$\frac{\partial T_R(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = - \underbrace{\mathbf{n}_\Sigma^T}_{(1 \times n)} \cdot \underbrace{\mathbf{S}(T_R, \mathbf{s})}_{(n \times n)} \cdot \underbrace{(\mathbf{n}_\Sigma^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(T_R, \mathbf{s})))}_{(1 \times 1)}^{-1} . \quad (4.28)$$

Damit ist die Iterationsmatrix \mathbf{Q}_s nach (4.21) vollständig aus bekannten Größen bestimmt und die Newton–Iteration (4.18) zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (4.17) kann durchgeführt werden.

Auch für dieses Verfahren soll die Iteration zur Bestimmung einer Nullstelle der Residuenabbildung $\mathbf{Q}(\mathbf{s}): \Sigma \rightarrow \Sigma$ wieder vollständig auf die Poincaré–Ebene Σ beschränkt sein. Um hierzu das in Abschnitt 4.2 beschriebene erforderliche Schema an Projektionen bezüglich der Poincaré–Ebene unverändert übernehmen zu können, ist lediglich die orthogonale Projektion

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s^\Sigma &= \mathbf{B}_\Sigma^T \cdot \mathbf{Q}_s \cdot \mathbf{B}_\Sigma, \\ \dim \mathbf{Q}_s^\Sigma &= (n-1) \times (n-1), \quad \dim \mathbf{Q}_s = n \times n \end{aligned} \quad (4.29)$$

erforderlich. Dabei kommt wieder die $(n \times (n-1))$ –Projektionsmatrix \mathbf{B}_Σ entsprechend der Definition (4.14) zum Einsatz.

Damit ist gezeigt, dass zur Lösung der Residuengleichung (4.17) auf die unsichere Anwendung einer Differenzenapproximation verzichtet werden kann. Der entwickelte Algorithmus zur Bestimmung der Iterationsmatrix \mathbf{Q}_s nach Gl. (4.21) ist dabei keineswegs auf die Methode der Poincaré–Abbildung zur Bestimmung periodischer Lösungen beschränkt, sondern kann direkt auch sowohl in anderen Einfach– als auch in Mehrfachschießverfahren ([BuchauerHiltmannKiehl94]) zur Anwendung gelangen.

Diese Herleitung zeigt, dass die Iterationsmatrix \mathbf{Q}_s ganz entscheidend von der Sensitivitätsmatrix als Lösung der VDGL (4.24) abhängt. Nahe liegend wäre es nun, einfach in jedem Iterationsschritt des Newton–Verfahrens nach den Bewegungsgleichungen die VDGL zu lösen. Allerdings spricht die bereits im vorigen Abschnitt 4.3.1 diskutierte Fehlerproblematik sowie der insbesondere bei großer Systemdimension n bedeutende Aufwand dagegen – vergleichbar zur Berechnung mittels finiter Differenzen stellen die VDGL n zusätzliche Anfangswertprobleme der Dimension n dar. Aus diesem Grund werden im nächsten Abschnitt die VDGL näher analysiert. Darauf aufbauend wird dann ein effizienter Algorithmus zur synchronen Lösung eines GDGL–Systems und der zugehörigen Variationsdifferentialgleichungen dargelegt.

4.3.3 Zur Berechnung der Sensitivitätsmatrix

Die Variationsdifferentialgleichung (4.24) stellt ein System von insgesamt n^2 linearen Differentialgleichungen in den unbekannten Sensitivitäten S_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ dar, die allein von der System–Jacobimatrix $\mathbf{f}_y(\mathbf{y}(t, \mathbf{s}))$ abhängen. Im Gegensatz zu [Meijaard91, NayfehBalachandran95, ParkerChua89], die von der analytischen Verfügbarkeit der VDGL ausgehen, ist der Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen, dass zum einen \mathbf{f}_y numerisch berechnet werden muss, üblicherweise durch eine Approximation mittels finiter Differenzen, und dass zum anderen die Systemdimension groß ist ($50 \leq n \leq 250$).

Unter dieser Prämisse stellt die Auswertung des GDGL–Systems (4.1) (Nominalsystem) *synchron* mit *Aufbau und Auswertung* der VDGL (4.24) (Sensitivitätssystem) in Bezug auf Integrationsfehler und Effizienz eine geeignete Methodik dar. Daneben kann noch die Tatsache gewinnbringend genutzt werden, dass \mathbf{f}_y bei Anwendung impliziter Integrationsalgorithmen als Bestandteil der Korrekturiteration der Nominallösung ohne Zusatzaufwand zur Verfügung steht (diese Aussage wird jedoch später noch eingeschränkt werden).

Wird die Sensitivitätsmatrix spaltenweise betrachtet,

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} = [\mathcal{S}_1 \mid \mathcal{S}_2 \mid \dots \mid \mathcal{S}_n], \quad \mathcal{S}_i = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

können nach Einführung eines kombinierten Zustandsvektors $\boldsymbol{\nu}$,

$$\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{y}^T, \mathcal{S}_1^T, \mathcal{S}_2^T, \dots, \mathcal{S}_n^T]^T, \quad (4.30)$$

Nominal- und Sensitivitätssystem zu einem kombinierten $(n+n^2)$ -dimensionalen Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\nu})$ zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathcal{S}}_1 \\ \dot{\mathcal{S}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{S}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{S}_1 \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{S}_n \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \cdot \mathcal{S}_1 & \mathbf{f}_{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \cdot \mathcal{S}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{f}_{\mathbf{y}} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \cdot \mathcal{S}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Die direkte Integration dieses kombinierten Systems mit einem impliziten Integrationsalgorithmus hat aber neben dessen Größe noch eine Reihe weiterer gravierender Nachteile: Die dabei erforderliche Auswertung der Jacobimatrix $\tilde{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\nu}}$ erweist sich selbst bei Ausnutzung der inhärenten Blockstruktur (nur die erste Spalte sowie die Hauptdiagonale sind mit gleichartigen Blockmatrizen besetzt) durch das Auftreten der zweiten Ableitungen $\mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ (Hessematrix) als extrem aufwändig. Die Schrittweitensteuerung kann durch die Sensitivitätsgleichungen ungünstig beeinflusst werden. Und nicht zuletzt bleibt die Linearität der VDGL (4.24) in den unbekannten Sensitivitäten unberücksichtigt. Insgesamt ergibt sich also ein sehr hoher Rechen- und Speicheraufwand bereits für relativ kleine Systemdimensionen n . Der im Anschluss vorgestellte Algorithmus stellt einen möglichen Weg zur Vermeidung oder zumindest erheblichen Einschränkung dieser Nachteile dar.

4.3.4 Effiziente synchrone Integration von Nominal- und Sensitivitätssystem

Die grundlegenden mathematischen Ideen der hier verfolgten Strategie gehen auf [CaracotsiosStewart85] zurück, weitere Varianten werden in [FeeryTolsmaBarton97, MalyPetzold96] entwickelt. Ausgangspunkt ist in der Regel der umfassendere Ansatz der Sensitivität bezüglich n_{π} Systemparametern $\boldsymbol{\pi} = (p_1, \dots, p_{n_{\pi}})$, die für die folgenden Herleitungen gemeinsam mit den Anfangszuständen im erweiterten Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta} = [\mathbf{s}^T; \boldsymbol{\pi}^T]^T$ der Dimension $n_{\vartheta} = n + n_{\pi}$ zusammengefasst sind. Implementiert sind diese Verfahren stets als Erweiterung eines Integrationscodes, mit dem sie folglich in engem Zusammenhang stehen. Die vorgestellte Strategie baut auf dem BDF-Code DASSL (BDF – Backward Difference Formula) von L. PETZOLD auf, [BrenanCampbellPetzold96], und ist in dem Derivat DAGSL von M. ARNOLD implementiert, [Arnold00].

Grundlage von DASSL ist eine implizite Darstellung der Systemgleichungen, das kombinierte Nominal-Sensitivitäts-System hat im Falle der MKS-Bewegungsgleichungen (4.1)

dann die Form ($\mathcal{S}_i = \partial \mathbf{y} / \partial \vartheta_i$)

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\pi}) := \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{s}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{n_\pi} \quad (4.32a)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_i(\mathcal{S}_i, \dot{\mathcal{S}}_i) := \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \mathcal{S}_i + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \dot{\mathcal{S}}_i + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vartheta_i} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{S}_i(0) = \mathcal{S}_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n_\vartheta \quad (4.32b)$$

mit insgesamt $n \cdot n_\vartheta$ Sensitivitätsgleichungen. Nachstehende Herleitung folgt zum Teil der Beschreibung in [FeeryTolsmaBarton97].

Ein Integrationsverfahren approximiert das kontinuierliche Modell, beschrieben durch die Differentialgleichungen (4.32a), und folglich dessen kontinuierliche Lösung durch ein diskretisiertes Modell bzw. eine diskretisierte Lösung, [Eich-SoellnerFührer98]. Der allgemeine k -Schritt BDF-Ansatz besteht nun darin, zum Zeitschritt t_m die Ableitung $\dot{\mathbf{y}}_m$ der exakten Lösung durch die Ableitung desjenigen Polynoms zu ersetzen, das die berechnete Lösung an den $k+1$ Zeitpunkten t_m, \dots, t_{m-k} interpoliert,

$$\dot{\mathbf{y}}_m := \frac{\alpha_0}{h} \mathbf{y}_m + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{y}_{m-j}.$$

Dabei sind die zurückliegenden $\mathbf{y}_{m-j}, j = 1, \dots, k$ bereits in den vorangegangenen Integrationsschritten berechnet worden. Es ergibt sich dann das nichtlineare implizite System

$$\mathbf{F}\left(t_m, \mathbf{y}_m, \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{m-j}, \boldsymbol{\pi}\right) = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

wobei $h = t_m - t_{m-1}$ die (der Einfachheit halber als konstant angenommene) Schrittweite und α_j die Koeffizienten der BDF-Methode repräsentieren, [BrenanCampbellPetzold96]. Gelöst wird dieses Gleichungssystem für das aktuelle, diskrete \mathbf{y}_m iterativ durch ein modifiziertes Quasi-Newton-Verfahren

$$\tilde{\mathbf{J}} \cdot \Delta \mathbf{y}_m^{(q)} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}_m^{(q)}), \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{y}_m^{(q)} = \mathbf{y}_m^{(q+1)} - \mathbf{y}_m^{(q)}. \quad (4.34)$$

Darin ist die eigentliche System-Jacobimatrix

$$\mathbf{J}_m^{(q)} = \frac{\alpha_0}{h} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_m^{(q)}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}_m^{(q)}} \quad (4.35)$$

wegen der hier unumgänglichen, sehr aufwändigen Berechnung mittels einer Differenzenapproximation (vgl. (3.7)) durch die Iterationsmatrix $\tilde{\mathbf{J}}$ angenähert. Diese ergibt sich zunächst aus der Jacobimatrix $\mathbf{J}_1^{(1)}$ gemäß (4.35), bleibt dann aber solange unverändert erhalten – auch über mehrere Integrationsschritte hinweg – bis die Iteration (4.34) nicht mehr in befriedigendem Maße konvergiert. Erst dann wird eine neue Matrix $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}_m^{(q)}$ für die aktuellen m, q berechnet. Darüber hinaus sollte bei der Berechnung der Iterationsmatrix die spezielle Struktur von (4.32a) Beachtung finden, es gilt $\partial \mathbf{F} / \partial \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{I}$. Der Startwert der Iteration wird in einem Prädiktorschritt aus einem vorhergehenden Interpolationspolynom extrapoliert,

$$\mathbf{y}_m^{(0)} := {}^p \mathbf{y}_m := \sum_{j=1}^k \alpha_j^p \mathbf{y}_{m-j}. \quad (4.36)$$

Hat für den aktuellen Zeitpunkt t_m die Iterationsfolge $(\mathbf{y}_m^{(q)}, \dot{\mathbf{y}}_m^{(q)})$ gegen eine Lösung $(\mathbf{y}_m, \dot{\mathbf{y}}_m)$ der Bewegungsgleichung (4.32a) zufrieden stellend konvergiert, können die Sensitivitätsgleichungen (4.32b) als n_ϑ lineare Gleichungssysteme der Form

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{S}}_i \\ \mathcal{S}_i \end{bmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vartheta_i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_i = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \vartheta_i} \in \mathbb{R}^n \quad (4.37)$$

aufgebaut und unabhängig voneinander mittels BDF gelöst werden. Die Systemmatrix \mathbf{A} der Sensitivitätsgleichungen wird dazu mit den diskreten Sub-Jacobimatrizen (4.35) der Korrekturiteration des Nominalsystems angenähert, $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_m = [\partial \mathbf{F} / \partial \dot{\mathbf{y}}_m, \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m]$. Im Falle des im Weiteren beschriebenen Vorgehens muss demnach allerdings die Matrix \mathbf{A}_m und damit die Sub-Jacobimatrix $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m$ in *jedem* Integrationsschritt einmal ausgewertet werden, und zwar auf der Grundlage der erfolgreich iterierten Nominallösung $(\mathbf{y}_m, \dot{\mathbf{y}}_m)$ unmittelbar vor der Lösung von (4.37). Nur so kann eine ausreichend genaue Approximation der Sensitivitätsgleichungen gewährleistet werden, aufgrund der Differenzenapproximation von $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m$ ist sonst mit einem nicht vernachlässigbaren Fehler in den Sensitivitäten zu rechnen. Im Falle von Sensitivitäten bezüglich der Anfangsbedingungen, $\vartheta_i := s_i$, gilt $\partial \mathbf{F} / \partial \vartheta_i = \partial \mathbf{F} / \partial s_i = \mathbf{0}$, wohingegen für $\vartheta_j := p_i$ die Ableitung $\partial \mathbf{F} / \partial p_i$ wiederum aus einer Differenzenapproximation folgt. Vergleichbar zur internen numerischen Differentiation aus 4.3.1 basiert die Lösung der Sensitivitätsgleichungen hier also ebenfalls auf der direkten Ableitung des eigentlichen Diskretisierungsschemas, mit dem das Anfangswertproblem (4.32a) approximiert ist.

Analog zum BDF-Ansatz (4.33) des nominellen Systems (4.32a) baut der in DAGSL implementierte Algorithmus also ebenfalls auf der BDF-Diskretisierung der n_ϑ Sensitivitätsgleichungen auf, im Folgenden gezeigt für das System i , $i = 1, \dots, n_\vartheta$. Dabei sind sowohl die Ordnung k als auch die Polynomkoeffizienten α_j des aktuellen Zeitschrittes t_m direkt aus dem nominellen BDF-Ansatz (4.33) übernommen. Mit der diskreten Polynomapproximation der Ableitung $\dot{\mathcal{S}}_i$ folgt somit aus (4.37) für den Zeitschritt t_m

$$\mathbf{A}_m \cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{h} \mathcal{S}_{i,m} + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{S}_{i,m-j} \\ \mathcal{S}_{i,m} \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{y}_m, \dot{\mathbf{y}}_m)}{\partial \vartheta_i} = \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

also ein lineares Gleichungssystem in den n unbekannten Sensitivitäten $\mathcal{S}_{i,m}$. Dieses kann leicht auf die gewohnte Darstellung $\mathbf{A}^* \cdot \mathcal{S}_{i,m} = \mathbf{b}$ mit regulärer $(n \times n)$ -Systemmatrix \mathbf{A}^* umgeformt und mit einem Gauß-Algorithmus gelöst werden. Aus algorithmischen Gründen ist jedoch eine äquivalente Implementierung vergleichbar der Korrekturiteration des Nominalsystems (4.32a) durch den Newton-Ansatz (4.34) vorzuziehen. Das lineare Gleichungssystem (4.38) wird dann durch genau *einen* Schritt der Newton-Iteration

$$\mathbf{J}_{i,m}^{\hat{\mathbf{F}}} \cdot \Delta \mathcal{S}_{i,m}^{(q)} = -\mathbf{A}_m \cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{h} \mathcal{S}_{i,m}^{(q)} + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{S}_{i,m-j}^{(q)} \\ \mathcal{S}_{i,m}^{(q)} \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vartheta_i} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathcal{S}_{i,m}^{(q)} = \mathcal{S}_{i,m}^{(q+1)} - \mathcal{S}_{i,m}^{(q)} \quad (4.39)$$

gelöst. Die Lösung $\mathcal{S}_{i,m}$ ($\equiv \mathcal{S}_{i,m}^{(1)}$) im aktuellen Integrationsschritt t_m ist – bezüglich der Näherungen $\mathbf{A}_m, \partial \mathbf{F} / \partial \vartheta_i$ und unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern – in beiden

Fällen exakt. Für die Iterationsmatrix gilt dabei mit der impliziten Darstellung $\hat{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$ der Sensitivitätsgleichungen (4.32b)

$$\mathbf{J}_{i,m}^{\hat{\mathbf{F}}} = \frac{\alpha_0}{h} \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_i}{\partial \dot{\mathbf{S}}_{i,m}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_i}{\partial \mathbf{S}_{i,m}} = \frac{\alpha_0}{h} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_m} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}_m} \equiv \mathbf{J}_m ,$$

diese ist also identisch mit der Iterationsmatrix (4.35) für die Korrekturiteration der Nominallösung (4.34) nach erfolgreicher Konvergenz und fällt bei der Approximation der Sub-Jacobimatrix $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m$ zum Aufbau von \mathbf{A}_m mit nur geringem Mehraufwand an. Der Prädiktorwert des Newton-Schrittes folgt analog zum Prädiktor (4.36) der Nominallösung aus der Extrapolation eines Interpolationspolynoms mit den Koeffizienten α_j^p .

Die diskreten Sensitivitäten $\mathbf{S}_{i,m}$ in jedem Integrationsschritt erhält man also als Lösung des linearen, diskretisierten Sensitivitätssystems (4.38). Damit wird aber deren lokaler Fehler weitestgehend durch die Genauigkeit bei der Lösung des Nominalsystems, also die Integrationstoleranz TOL_{nom} , sowie durch die Genauigkeit der internen Differenzenapproximationen zur Berechnung der Sub-Jacobimatrizen $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m$ und eventuell der $\partial \mathbf{F} / \partial \vartheta_i$ bestimmt. Werden diese Differenzenapproximationen gemäß Fußnote 3 auf S. 70 mit einer inkrementellen Störung in der Größenordnung der Wurzel $\sqrt{\varepsilon_M}$ der Maschinengenauigkeit evaluiert, kann der resultierende Fehler ($\varepsilon_D = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_M})$) gegenüber der Integrationstoleranz TOL_{nom} vernachlässigt werden und die Sensitivitäten ergeben sich mit einer Genauigkeit

$$\varepsilon_S = \mathcal{O}(TOL_{nom}) .$$

Dies entspricht der Genauigkeit bei Anwendung der in Abschnitt 4.3.1 dargelegten internen numerischen Differentiation. Um eine unnötige und ungünstige Beeinflussung der Schrittweitensteuerung zu vermeiden, sollten demnach aber auch die Integrationstoleranzen TOL_{sens} für die Sensitivitätsgleichungen relativ hoch gewählt werden (z.B. $TOL_{sens} = 10$).

Anstelle der direkten Lösung der Sensitivitätsgleichungen (4.39) wird in [FeeryTolsmaBarton97] eine Quasi-Newton-Iteration auch für dieses lineare Gleichungssystem vorgeschlagen. Die Iteration erfolgt mittels der Matrix $\tilde{\mathbf{J}}$, mit der bereits auch die Nominallösung entsprechend (4.34) erfolgreich bestimmt wurde. Zwar muss auch hier wieder sowohl die Sub-Jacobimatrix $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m$ der Matrix \mathbf{A}_m als auch die rechte Seite $\partial \mathbf{F} / \partial \vartheta_i$ in jedem Integrationsschritt neu berechnet werden, im Gegensatz zu obiger Methode entfällt jedoch die LU-Zerlegung von $\mathbf{J}_m^{\hat{\mathbf{F}}} = \mathbf{J}_m$ ⁴. Da jedoch hier die LU-Zerlegung im Vergleich zum Aufbau von $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}_m$ aufgrund der erforderlichen Auswertungen des MKS-Algorithmus kaum ins Gewicht fällt, ist durch die Quasi-Newton-Iteration von (4.39) kein Effizienzvorteil zu erwarten.

Die vollständige Beibehaltung des Prinzips der Quasi-Newton-Iteration wird in [MalyPetzold96] verfolgt. Im Gegensatz zu den beiden beschriebenen Verfahren werden dazu Nominal- und Sensitivitätssysteme in einer gemeinsamen Korrekturiteration gleichzeitig gelöst. Grundlage ist der kombinierte Zustandsvektor $\boldsymbol{\nu}$ gemäß (4.30) und das

⁴Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit quadratischer Systemmatrix folgt in DASSL dem Gaußschen Algorithmus: Nach der Zerlegung der Iterationsmatrix $\mathbf{J} = \mathbf{L} \mathbf{U}$ in eine untere und eine obere Dreiecksmatrix kann die Lösung durch sequentielles Einsetzen gefunden werden, [Stoer99].

kombinierte System (4.31) in impliziter Formulierung. Unter Berücksichtigung der BDF–Diskretisierung bleibt der Quasi–Newton–Ansatz ($\tilde{\mathbf{F}} := \dot{\boldsymbol{\nu}} - \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\nu})$)

$$\tilde{\mathbf{J}} \cdot \Delta \boldsymbol{\nu}_m^{(q)} = -\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\nu}_m^{(q)}) , \quad \boldsymbol{\nu}_m \in \mathbb{R}^{n(1+n_\vartheta)} , \quad q = 1, \dots, q_m - 1 ,$$

wobei die Iterationsmatrix $\tilde{\mathbf{J}}$ über so viel Iterations– und Integrationsschritte wie möglich beibehalten wird. Und darin liegt ein bedeutender Vorteil dieses Verfahrens. In [MalyPetzold96] wird auch gezeigt, dass zur Berechnung bzw. Aktualisierung von $\tilde{\mathbf{J}}$ deren Näherung allein durch die Blockdiagonalmatrix $\tilde{\mathbf{J}} \approx \text{diag}[\mathbf{J} \ \mathbf{J} \ \dots \ \mathbf{J}]$ ausreichend ist, die Jacobiblöcke $\partial \mathbf{J} / \partial \mathbf{y} \cdot \mathcal{S}_i + \partial \mathbf{J} / \partial \vartheta_i$ aus (4.31) und damit die Hessematrizen $\mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ also nicht berechnet werden müssen. Nachteilig wirkt sich indes aus, dass in jedem Integrationsschritt $q_m - 1$ Funktionswerte $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\nu}_m^{(q)})$ ausgewertet werden müssen (die anderen beiden Verfahren benötigen die vergleichbare Berechnung der Matrix \mathbf{A}_m nur einmal je Integrationsschritt) und dass die Linearität der Sensitivitätsgleichungen unberücksichtigt bleibt. Auch kann deren Integration sowohl die Iterationsgeschwindigkeit des Gesamtsystems als auch die Schrittweitensteuerung negativ beeinflussen.

4.3.5 Einbettung in einen Fortsetzungsalgorithmus

Die in Abschnitt 4.2 beschriebene vorteilhafte Beschränkung der Iterationsrichtung auf eine Ebene orthogonal zur Tangente \mathbf{t} an den Pfad im \mathbb{R}^{n+1} durch Berechnung der Richtungsableitungen bezüglich der erweiterten Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{H,\Sigma}$ ist nach Einbeziehung der VDGL nicht mehr anwendbar. Eine einfache Möglichkeit der Einbettung des entwickelten Verfahrens in den Fortsetzungsalgorithmus von PATH besteht in einem konstanten Verfolgungsparameter p während der Korrektoriteration der Pfadverfolgung. Jedoch ist bereits in Abschnitt 3.2.2 erwähnt, dass diese Art der Parametrierung beispielsweise im Bereich von Sattelpunkten (siehe Abb. 3.4) Probleme aufwirft. Um die Iterationsrichtung wieder als orthogonal zur Tangente \mathbf{t} festzulegen, wird der Iterationsgleichung (4.18) eine entsprechende skalare Zusatzgleichung angehängt. Eine solche Erweiterung ist in [Seydel94, S. 139f] grundsätzlich beschrieben, die Anpassung an das oben beschriebene Verfahren zur Bestimmung periodischer Lösungen wird nun entwickelt.

Betrachtet wird die Bestimmungsgleichung (4.17) einer periodischen Lösung, erweitert um die Abhängigkeit vom Verfolgungsparameter p ,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}, p) = \boldsymbol{\varphi}(T_R(\mathbf{s}, p), \mathbf{s}, p) - \mathbf{s} = \mathbf{0} . \quad (4.40)$$

Die (4.18) entsprechende Iterationsgleichung eines Newton–Verfahrens ist dann zunächst unterbestimmt – n Gleichungen bei $n + 1$ Unbekannten $\Delta \mathbf{s}, \Delta p$ – kann aber durch eine skalare Orthogonalitätsbedingung bezüglich der Iterationsrichtung ausgeglichen werden; mit der normierten Pfadtangente $\mathbf{t} := \mathbf{t}^1 := \mathbf{t} / \|\mathbf{t}\|$ erhält man die erweiterte Iterationsgleichung

$$\mathbf{Q}_s \cdot \Delta \mathbf{s} + \mathbf{Q}_p \cdot \Delta p = -\mathbf{Q}(\mathbf{s}, p) , \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{t}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{s} \\ \Delta p \end{pmatrix} = 0 . \quad (4.41b)$$

Die Bestimmung der Jacobimatrix \mathbf{Q}_p läuft identisch zur obigen Bestimmung der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s ab, wobei lediglich der Anfangszustand \mathbf{s} durch den Systemparameter p zu ersetzen ist. Analog zu Gleichung (4.21) ergibt die analytische Differentiation von (4.40) für die Jacobimatrix

$$\mathbf{Q}_p = \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial T_R} \frac{\partial T_R}{\partial p}.$$

Die Sensitivität $\partial \varphi / \partial p$ einer Trajektorie bezüglich dem Parameter p zum Zeitpunkt $t = T_R$ folgt durch Integration der (4.22) entsprechenden Sensitivitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}(t, \mathbf{s}, p), p) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial p} = \mathbf{0}. \quad (4.42)$$

Das zu integrierende Gesamtsystem besteht dann also aus den insgesamt $n(n+2)$ Gleichungen

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, p) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{s} \quad (4.43a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}(0)}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{I} \quad (4.43b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}(0)}{\partial p} = \mathbf{0}. \quad (4.43c)$$

Aufgrund ihrer konformen Struktur können die Variationsdifferentialgleichungen (4.43b) und die Sensitivitätsgleichungen (4.43c) nach Einführung eines erweiterten Parametervektors $\boldsymbol{\vartheta} = [\mathbf{s}^T; p]^T$ gemeinsam synchron mit dem nominellen System integriert werden. Der Algorithmus hierzu ist bereits in Abschnitt 4.3.4 ausführlich dargelegt.

Ebenso wird bei der Bestimmung der partiellen Ableitung der Rückkehrzeit nach dem Systemparameter $\partial T_R / \partial p$ wieder auf diejenige Vorgehensweise zurückgegriffen, die auch auf den entsprechenden Term $\partial T_R / \partial \mathbf{s}$ führt. Analog zu Gleichung (4.28) erhält man nach Differentiation bezüglich p

$$\frac{\partial T_R(\mathbf{s}, p)}{\partial p} = - \underbrace{\mathbf{n}_\Sigma^T}_{(1 \times n)} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p} \Big|_{T_R}}_{(n \times 1)} \cdot \underbrace{\left(\mathbf{n}_\Sigma^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(T_R, \mathbf{s}, p), p) \right)}_{(1 \times 1)}^{-1}.$$

Damit ist der erste Teil (4.41a) der Iterationsgleichung eigentlich bestimmt, da jedoch die Iteration nach wie vor auf die Poincaré-Ebene Σ beschränkt sein soll, muss die Jacobimatrix \mathbf{Q}_p noch entsprechend Gleichung (4.29) projiziert werden,

$$\mathbf{Q}_p^\Sigma = \mathbf{B}_\Sigma^T \cdot \mathbf{Q}_p, \quad \dim \mathbf{Q}_p^\Sigma = (n-1) \times 1, \quad \dim \mathbf{Q}_p = n \times 1.$$

Vor der Zusammenfassung in einem Gleichungssystem ist noch die Orthogonalitätsbedingung der Suchrichtung (4.41b) ebenfalls in die Poincaré-Ebene zu projizieren. Die normierte Pfadtangente $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$ kann dazu direkt von dem in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Tangentenprädiktor übernommen werden. Ist \mathbf{t} Gleichung (3.4) folgend durch eine Sekante angenähert, die koordinatenweise aus den beiden zurückliegenden Lösungspunkten

berechnet wird, erlaubt die Zerlegung $\mathbf{t} = (\mathbf{t}^{\mathbf{y}^T}, \mathbf{t}^p)^T$ ($\mathbf{t}^{\mathbf{y}^T} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{t}^p \in \mathbb{R}$), Gleichung (4.41b) auf die Darstellung

$$\mathbf{t}^{\mathbf{y}^T} \cdot \Delta \mathbf{s} + \mathbf{t}^p \cdot \Delta p = 0$$

umzuformen. Nach der Projektion $\mathbf{t}_\Sigma^{\mathbf{y}} := \mathbf{B}_\Sigma^T \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{y}}$ des ersten Summanden in die Poincaré-Ebene (der zweite Summand ist vollständig skalar und damit nicht zu projizieren), verbleibt die neue Orthogonalitätsbedingung

$$\underbrace{(\mathbf{B}_\Sigma^T \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{y}})^T}_{\mathbf{t}_\Sigma^{\mathbf{y}^T}} \cdot \Delta \mathbf{s}_\Sigma + \mathbf{t}^p \cdot \Delta p = 0 .$$

Zusammengefasst in einem linearen Gleichungssystem erhält man die (4.41) ersetzende, erweiterte und projizierte Iterationsgleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_s^\Sigma & \mathbf{Q}_p^\Sigma \\ \mathbf{t}_\Sigma^{\mathbf{y}^T} & \mathbf{t}^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{s}_\Sigma \\ \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_\Sigma \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \Delta \mathbf{s}_\Sigma \in \Sigma , \quad (4.44)$$

also insgesamt n Gleichungen für die n Unbekannten $(\Delta \mathbf{s}_\Sigma, \Delta p)$. Zur Inkrementierung des Anfangszustandes $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ ist abschließend dann noch die Rückprojektion $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{B}_\Sigma \cdot \Delta \mathbf{s}_\Sigma$ erforderlich. Die neue Iterationsgleichung (4.44) erfüllt die eingangs gestellten Forderungen an die Korrekturiteration der Bestimmungsgleichung (4.40): Die Iteration findet ausschließlich in der Poincaré-Ebene Σ statt und die Iterationsrichtung ist auf eine Hyperebene H orthogonal zur Tangente \mathbf{t} an den Pfad beschränkt.

Der ursprünglich in PATH implementierte Algorithmus zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen von GDGL-Systemen der Form (4.1), folgend der Methode der Poincaré-Abbildung als Unterart der Einfachschießverfahren, ist zwar prinzipiell auch zur Untersuchung der Bewegungsgleichungen von Schienenfahrzeugen geeignet, scheitert aber bei Berücksichtigung der nichtlinearen Kontaktgeometrie und -mechanik zwischen Rad und Schiene. Der Grund hierfür ist in der zur Newton-Iteration der Bestimmungsgleichung (4.17) verwendeten Approximation der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s durch finite Differenzen zu finden, die auf einen systematischen Fehler der Größenordnung $\varepsilon_g = \mathcal{O}(\sqrt{TOL})$ führt. Eine gewisse Abhilfe schafft zwar die Verwendung extrem niedriger Integrationstoleranzen TOL zur Lösung des der Poincaré-Abbildung (4.9) innewohnenden Anfangswertproblems, allerdings äußern sich diese bei größeren GDGL-Systemen leicht in einem inakzeptabel hohen Rechenzeitaufwand.

Die bei Weitem geeignetere, sicherere und effizientere Vorgehensweise ist dagegen in der Berechnung der Jacobimatrix \mathbf{Q}_s aus der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(T_R, \mathbf{s}) = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{s}|_{t=T_R}$ gemäß (4.21) zu sehen. Diese folgt als Lösung der insgesamt n^2 Variationsdifferentialgleichungen (4.24). Verwendet wird hierzu der Integrationsalgorithmus DAGSL, der die synchrone Integration des kombinierten Nominal-Sensitivitäts-Systems (4.32) erlaubt. Dessen Grundidee ist, in jedem Zeitschritt t_m mittels eines BDF-Verfahrens zunächst die diskrete nominelle Lösung \mathbf{y}_m von (4.32a) zu bestimmen. Darauf aufbauend werden dann die n voneinander unabhängigen Sensitivitäten $\mathcal{S}_{i,m} = \partial \mathbf{y}_m / \partial s_i, i = 1, \dots, n$ über eine analoge BDF-Diskretisierung der als n lineare Gleichungssysteme (4.37) formulierten VDGL (4.32b) in einer sequentiellen Schleife berechnet. Wie gezeigt, ergeben sich

die Sensitivitäten dadurch mit einer Genauigkeit $\varepsilon_S = \mathcal{O}(TOL_{nom})$ und der Gesamtfehler der daraus approximierten Iterationsmatrix \mathbf{Q}_s reduziert sich ebenfalls auf $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \mathcal{O}(TOL_{nom})$. Die zusätzliche synchrone Bestimmung der Sensitivitäten bezüglich des Verfolgungsparameters p erlaubt dann noch die günstige Festlegung der Iterationsrichtung als orthogonal zur Tangente an den Pfad im Zustands-Parameter-Raum. Die direkte Berechnung periodischer Lösungen in PATH ist um diese Vorgehensweise erweitert, womit dessen Anwendungsspektrum jetzt erheblich vergrößert ist.

Allerdings kann sich die mit (4.1) geforderte Formulierung der Bewegungsgleichungen als System gewöhnlicher Differentialgleichungen als eine zu restriktive Beschränkung erweisen. Gerade im Falle der Modellierung eines technischen Systems als Mehrkörpersystem ist eine differentiell-algebraische Beschreibungsweise der Systemgleichungen oftmals geboten. Die Erweiterung der bisher entwickelten Algorithmen auf die dabei resultierenden gemischten Systeme aus differentiellen und algebraischen Gleichungen ist der Inhalt des nächsten Kapitels.

Kapitel 5

Verzweigungsanalyse von Mehrkörpersystemen in differentiell–algebraischer Formulierung

Die bisherigen Ausführungen und Methoden beruhen stets auf der Formulierung (3.2) der Bewegungsgleichungen als System gewöhnlicher Differentialgleichungen, $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, p, t)$. Zur Darstellung des mathematischen Modells eines Schienenfahrzeuges in einer solchen Formulierung ist zwischen Rad und Schiene ein elastischer Kontakt gemäß Abschnitt 2.1.4 zu modellieren. Wie dort bereits angedeutet, stellt sich dieser jedoch unter numerischen Gesichtspunkten als problematisch heraus. Abhilfe schafft eine Betrachtung der idealisierten Rad–Schiene–Schnittstelle als kinematische Zwangsbedingung. Das Subsystem Radsatz – Gleis (oder Rad – Schiene bei Einzelradaufhängung) bildet in diesem Fall im Rahmen der Abstrahierung als Mehrkörpersystem über die Kontaktbedingung (2.4) bzw. (2.6) eine kinematisch geschlossene Schleife. Abschnitt 2.1.2 folgend, ergeben sich die Bewegungsgleichungen eines derartigen MKS als System differentiell–algebraischer Gleichungen (2.2) in Deskriptorform (auf die Angabe der expliziten Abhängigkeit von der Zeit t sei hier und im Folgenden verzichtet, weiter seien die Voraussetzungen für Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung stets erfüllt, siehe z.B. [DeuffhardBornemann94]):

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) \quad (5.1c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{v} \quad (5.1d)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}^T \mathbf{G}_p \mathbf{v}. \quad (5.1e)$$

Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems (5.1a)–(5.1c) sind neben den originären n_λ Zwangsbedingungen $\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$ auf Lageebene auch die Zwangsbedingungen auf

Geschwindigkeits– und Beschleunigungsebene (5.1d) bzw. (5.1e) erforderlich. Diese erhält man durch ein– bzw. zweimaliges Ableiten der Lagezwangsbedingung nach der Zeit. Ein Charakteristikum der Modellierung von Reibvorgängen in Kombination mit einem kinematischen Zwang, hier die Reibung im Kontaktbereich zwischen Rad und Schiene (starres oder quasi–elastisches Kontaktmodell in Abschnitt 2.1.4), besteht in der expliziten Abhängigkeit der Reib– und damit der eingepprägten Kräfte \mathbf{f}_e von den Zwangskräfte repräsentierenden Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$. Mit dem Deskriptorvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$ lässt sich die Deskriptorform (5.1) auch kompakt durch

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

mit singulärer Jacobimatrix $\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{y}}}$ darstellen. Die Erweiterung der in den beiden vorangehenden Kapiteln vorgestellten Verfahren zur Verzweigungsanalyse stationärer und periodischer Lösungen auf DAGL–Systeme in Deskriptorform (5.1), und damit auf allgemeine MKS mit kinematisch geschlossenen Schleifen, ist der Inhalt dieses Kapitels.

Zur Verzweigungsanalyse oder zumindest zur direkten Berechnung periodischer Lösungen von DAGL–Systemen der Form (5.1) existieren nur relativ wenige Arbeiten. Ein Programm zur Pfadverfolgung und direkten Berechnung stationärer und periodischer Lösungen solcher Gleichungssysteme wird in [Franke98] vorgestellt. Entsprechende allgemeine Randwertprobleme (z.B. zur Bestimmung periodischer Lösungen von (5.1)) behandeln [AscherSpiteri94] mit dem Programmsystem COLDAE und [Lamour97, SchulzBockSteinbach98]. Ein ganz ähnliches Bild ergibt sich auch bei Betrachtung der Literatur bezüglich der Verzweigungsanalyse von Schienenfahrzeugen. Von den in Abschnitt 1.2 bzw. 3.1.2 aufgeführten Arbeiten stützen sich allein [Franke98] und [KnudsenFeldbergJaschinski91, Jaschinski90] auf die Formulierung (5.1) als DAGL–System, die beiden letztgenannten allerdings nur teilweise und dann auch nur bei Verwendung der Brute–Force–Technik.

„*DAE’s differ in several key aspects from ODE’s*“ ([BrenanCampbellPetzold96, S. 15]). Im Folgenden werden zunächst einige grundlegende Begriffe und Besonderheiten differentiell–algebraischer Gleichungssysteme mit Schwerpunkt auf deren Integration vorbereitend zusammengefasst. Der zentrale Gedanke zur Verzweigungsanalyse von DAGL–Systemen ist die numerische Transformation auf ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen – die Zustandsform – wobei allerdings die notwendigen numerischen Integrationen weiterhin auf der Deskriptorform (5.1) basieren. Die erforderlichen Erweiterungen sowie der Nachweis der Anwendbarkeit der ausgewählten Zustandsform bilden den Kern des Kapitels. Die vorgestellte Strategie ist dabei keineswegs prinzipiell an PATH oder die darin implementierten Algorithmen gebunden.

5.1 Zur Integration differentiell–algebraischer Gleichungssysteme

Gewöhnliche Differential– und differentiell–algebraische Gleichungssysteme lassen sich zwar unter der übergeordneten impliziten Formulierung (5.2) zusammenfassen (der Unterschied besteht dabei in einer regulären oder einer singulären Jacobimatrix $\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{y}}}$), zur jewei-

ligen Lösung sind jedoch im Allgemeinen unterschiedliche Integrationsverfahren geeignet. Eine umfassende Übersicht über Theorie und Lösung beider Gleichungstypen ist z.B. in [DeuffhardBornemann94] zu finden. Einer der wesentlichen Unterschiede zwischen einem GDGL- und einem DAGL-System besteht in der erforderlichen Konsistenz der Anfangsbedingungen $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{p}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \boldsymbol{\lambda}_0^T)^T$ als Voraussetzung der Lösbarkeit eines DAGL-Systems. Das bedeutet aber, dass im Gegensatz zu GDGL-Systemen die Anfangsbedingungen *nicht* unabhängig voneinander gewählt werden können, diese müssen vielmehr neben den originären Zwangsbedingungen (5.1c) unter Umständen auch noch deren Zeitableitungen (5.1d), (5.1e) erfüllen. Bevor auf diese Problematik näher eingegangen wird, soll zunächst noch der für die Theorie von DAGL-Systemen grundlegende Begriff des Index eines DAGL-Systems eingeführt werden.

Der differentielle Index eines DAGL-Systems

Der differentielle Index eines DAGL-Systems ist nach [BrenanCampbellPetzold96, Eich-SoellnerFührer98] die Anzahl an erforderlichen Differentiationen, um die Ableitung $\dot{\mathbf{y}}$ des gesamten Zustandsvektors eindeutig in Abhängigkeit von \mathbf{y} darstellen zu können; es gilt also, ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen in *allen* Unbekannten \mathbf{y} zu finden. Im Fall der Bewegungsgleichungen (5.1) eines MKS muss die Zwangsbedingung (5.1c) dazu zunächst zweimal nach der Zeit t differenziert werden, es ergeben sich die Zwangsbedingungen (5.1d) und (5.1e). Bei invertierbarer Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{p})$ kann die dynamische Gleichung (5.1b) formal nach den Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}$ aufgelöst und in die Beschleunigungszwangsbedingung (5.1e) eingesetzt werden. Auflösung nach $\boldsymbol{\lambda}$ liefert

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^T)^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_e + \mathbf{v}^T \mathbf{G}_p \mathbf{v}) \quad \text{für} \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad \text{bzw.} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_e(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{v}^T \mathbf{G}_p \mathbf{v} \quad \text{für} \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}), \quad (5.4)$$

nach einer weiteren Differentiation bleibt die gesuchte Differentialgleichung für die algebraische Variable $\boldsymbol{\lambda}$; die Bewegungsgleichungen (5.1) stellen sich also als ein System vom differentiellen *Index 3* dar.

Unter der Annahme entsprechend geeigneter Anfangsbedingungen sind alle drei Formulierungen (5.1c)–(5.1e) der Zwangsbedingung analytisch gleichwertig, [Eich-SoellnerFührer98]. Das bedeutet, ersetzt man in den Bewegungsgleichungen (5.1) die Lagezwangsbedingung durch die Geschwindigkeitszwangsbedingung, weist das resultierende DAGL-System (5.1a), (5.1b), (5.1d) zwar den Index 2 auf, dennoch liefert es die gleiche analytische Lösung wie das ursprüngliche System (5.1a), (5.1b), (5.1c) vom Index 3. Analog resultiert die Verwendung der Beschleunigungsnebenbedingung (5.1e) in einem System vom Index 1. Diese *Indexreduktion* wird zwar häufig bei der Lösung von DAGL-Systemen mit höherem Index angewandt, die Identität der *numerischen* Lösungen ist dann allerdings nicht mehr gewährleistet. Eine Tatsache, der bei der Lösung von DAGL-Systemen mit höherem Index unbedingt Rechnung getragen werden muss.

Konsistente Anfangsbedingungen und Zwangsmannigfaltigkeiten

Eine notwendige Voraussetzung für Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{p}(t)^T, \mathbf{v}(t)^T, \boldsymbol{\lambda}(t)^T)^T$ der Bewegungsgleichungen (5.1) ist das Vorhandensein *konsi-*

stenter Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t=0) = \mathbf{y}_0 = (\mathbf{p}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \boldsymbol{\lambda}_0^T)^T$, [DeuffhardBornemann94, BrenanCampbellPetzold96, Eich-SoellnerFührer98]. Da die MKS–Gleichungen (5.1) wie gezeigt einen differentiellen Index von 3 aufweisen, sind bei der Generierung konsistenter Anfangsbedingungen neben den ursprünglichen Zwangsbedingungen (5.1c) auch noch deren $(\text{Index} - 1) = 2$ zeitliche Ableitungen zu betrachten; diese werden oft auch als *versteckte Zwangsbedingungen* bezeichnet, [AscherPetzold98]. Anfangsbedingungen \mathbf{y}_0 sind genau dann konsistent, wenn sie neben den algebraischen Nebenbedingungen auf Lage– und Geschwindigkeitsebene (5.1c), (5.1d) auch diejenigen auf Beschleunigungsebene (5.1e) erfüllen. Letztgenannte Bedingung kann mittels der Dynamikgleichungen (5.1b) in den Zusammenhang (5.3)/(5.4) für die Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ umformuliert werden, ein konsistenter Anfangsvektor \mathbf{y}_0 ist also durch das folgende System aus insgesamt $3n_\lambda$ Gleichungen definiert:

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_0) \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}_0) \mathbf{v}_0 \quad (5.5b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_e(\boldsymbol{\lambda}_0) - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_0) + \mathbf{v}_0^T \mathbf{G}_p \mathbf{v}_0. \quad (5.5c)$$

Die Zahl der frei wählbaren Anfangskoordinaten des erweiterten Zustandsvektors \mathbf{y}_0 reduziert sich damit auf insgesamt $(2n_p + n_\lambda) - 3n_\lambda = 2(n_p - n_\lambda)$. Gleichzeitig steht jedoch in (5.5) ein Instrumentarium zur Bestimmung konsistenter Anfangswerte zur Verfügung.

Betrachtet unter differentialgeometrischen Gesichtspunkten, definieren die $2n_\lambda$ Zwangsbedingungen (5.1c), (5.1d) eine $2(n_p - n_\lambda)$ –dimensionale *Zwangsmannigfaltigkeit* \mathcal{M} der freien Bewegung im Zustandsraum \mathbb{R}^{n_x} ,

$$\mathcal{M} := \{(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{v} = \mathbf{0}\} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (5.6)$$

[Führer88], auf der allein sich das Gesamtsystem (5.1) zu jedem Zeitpunkt t bewegen kann und muss. Daneben müssen die algebraischen Variablen $\boldsymbol{\lambda}(t)$ zu jedem Zeitpunkt t als stetige Funktionen der Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$ die Bedingung (5.3)/(5.4) erfüllen. Insgesamt gilt für eine Lösung $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ also stets: $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{M}$ und $\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}(t))$. Mithin muss sich aber auch zum Startzeitpunkt $t=0$ sowohl der Systemzustand $\mathbf{y}(t=0) = \mathbf{y}_0$ auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} befinden als auch (5.3)/(5.4) erfüllt sein. Ist dies gegeben, bezeichnet man \mathbf{y}_0 als konsistente Anfangsbedingungen und Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ sind garantiert, [Eich-SoellnerFührer98].

Die n_λ Lagezwangsbedingungen (5.1c) schränken die ursprünglich n_p freien Bewegungsmöglichkeiten (bzgl. der Lage) des MKS auf $n_f = n_p - n_\lambda$ Freiheitsgrade – *unabhängige Lageänderungen* – ein. Demnach kann der Vektor der Lagekoordinaten in n_f unabhängige (\mathbf{p}_u) und n_λ abhängige Koordinaten (\mathbf{p}_a) zerlegt werden, [WehageHaug82]. Nach analogem Aufteilen der Geschwindigkeitskoordinaten $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_u^T, \mathbf{v}_a^T)^T$ wird das Bewegungsverhalten des MKS eindeutig durch den Vektor der unabhängigen Zustände $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$ bestimmt, in dem die verbleibenden $2n_f$ unabhängigen Koordinaten oder *Minimalkoordinaten* zusammengefasst sind. Die für diese *Koordinatenzerlegung* erforderliche Aufteilung in abhängige und unabhängige Koordinaten stellt dabei im Allgemeinen ein nicht-triviales Problem dar. Im hier allein relevanten Fall von Fahrzeug– bzw. MKS–Systemen kann diese Zerlegung bei Betrachtung allein des Anfangszustandes jedoch in der Regel a priori bereits bei der Systemdefinition explizit durchgeführt werden, [Rulka98].

Unabhängige wie abhängige Lagekoordinaten werden dabei als sich jeweils ausschließende Teilmenge aller Lagekoordinaten festgelegt, $\{p_{u,i}\} \subset \{p_k\}$, $\{p_{a,j}\} \subset \{p_k\}$ wobei $\{p_{u,i}\} \cap \{p_{a,j}\} = \{\}$, $i = 1, \dots, n_f$, $j = 1, \dots, n_\lambda$, $k = 1, \dots, n_p$; diese Aufteilung gilt entsprechend auch für die Geschwindigkeitskoordinaten \mathbf{v} .

Zur Berechnung konsistenter Anfangsbedingungen \mathbf{y}_0 erweist sich nun folgende Strategie als vorteilhaft: Während die Anfangswerte \mathbf{z}_0 der unabhängigen Koordinaten frei vorgebar sind, folgen die Anfangswerte der $2n_\lambda$ abhängigen Koordinaten $\mathbf{p}_{a,0}, \mathbf{v}_{a,0}$ aus den $2n_\lambda$ Zwangsbedingungen (5.5a), (5.5b) unter Berücksichtigung der freien \mathbf{z}_0 . Darauf aufbauend ergeben sich die n_λ Anfangswerte $\boldsymbol{\lambda}_0$ aus dem nichtlinearen, impliziten Gleichungssystem (5.5c), explizites Auflösen nach (5.3) ist nur für $\mathbf{f}_e \neq \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\lambda})$ möglich. Die oftmals noch erforderlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{v}}_0$ ergeben sich dann durch Einsetzen in (5.1a), (5.1b).

Integrationsverfahren

Die numerische Integration der Bewegungsgleichungen (5.1) eines MKS mit kinematischen Schleifen kann prinzipiell auf zwei unterschiedlichen Formulierungen aufbauen. Ausgehend von der Formulierung als DAGL–System besteht eine Möglichkeit in der Reduktion auf die Minimal– oder Zustandsform, resultierend in einem System von $2n_f$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, z.B. [PotraRheinboldt91, Eich-SoellnerFührer98]. Das hierbei häufig eingesetzte Verfahren der Koordinatenzerlegung, [WehageHaug82], baut dazu auf einer expliziten Aufteilung der Systemzustände in abhängige und unabhängige Koordinaten auf und entspricht damit der oben beschriebenen Koordinatenzerlegung zur Berechnung konsistenter Anfangsbedingungen.

Verdrängt wird diese Vorgehensweise jedoch mehr und mehr durch die andere Möglichkeit zur Lösung solcher Gleichungssysteme, die direkt an der Formulierung (5.1) als DAGL–System angreift, ausführlich beschrieben z.B. in [DeuffhardBornemann94]. Als problematisch erweist sich dabei allerdings, dass (5.1a)–(5.1c) ein System vom Index 3 darstellt, einer Formulierung, die zu numerischer Instabilität bei der Lösung führt. Abhilfe schafft die Indexreduktion auf eine analytisch gleichwertige Index–2–Formulierung durch Differentiation der Zwangsbedingung (5.1c). Bei der numerischen Integration des resultierenden DAGL–Systems (5.1a), (5.1b), (5.1d) müssen allerdings die originären Lagezwangsbedingungen nicht mehr erfüllt sein, wodurch die unvermeidlichen Diskretisierungs– und Rundungsfehler leicht zu dem so genannten Drift–off–Effekt und damit zu unbrauchbaren Ergebnissen führen können, [Eich-SoellnerFührer98]. Eine Möglichkeit zu dessen Vermeidung besteht in der Stabilisierung mit der Lagezwangsbedingung, die Einführung von n_λ zusätzlichen algebraischen Variablen $\boldsymbol{\mu}$ vermeidet die dadurch erzeugte Überbestimmtheit des DAGL–Systems, [GearGuptaLeimkuhler85, BrenanCampbellPetzold96]. Es bleibt die folgende *stabilisierte Index–2–Formulierung*:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} + \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\mu} \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.7b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) \quad (5.7c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{v} . \quad (5.7d)$$

Der Vorteil dieser Darstellung liegt in der automatischen Erfüllung der Zwangsbedingungen sowohl auf Lage– als auch auf Geschwindigkeitsebene, sie wird nach den Erstautoren auch kurz als *Gear–Gupta–Leimkuhler(GGL)–Ansatz* bezeichnet. In [GearGuptaLeimkuhler85] wird gezeigt, dass eine Lösung dieser Formulierung stets auch Lösung des ursprünglichen Index–3–Systems (5.1a)–(5.1c) ist. Das bedeutet aber auch, dass jegliche Lösung für die künstlichen algebraischen Zusatzvariablen stets $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ergeben muss, weswegen deren Anfangswerte entsprechend mit $\boldsymbol{\mu}(t=0) = \mathbf{0}$ zu initialisieren sind. Um die kompakte implizite Beschreibung (5.2) der Deskriptorform zu erreichen, ist dann noch der Deskriptorvektor \mathbf{y} entsprechend zu erweitern: $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\mu}^T)^T$.

Zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen wird im Rahmen dieser Arbeit stets auf die GGL–Formulierung (5.7) als Standardbeschreibung von MKS mit kinematischen Schleifen zurückgegriffen. Geeignet hierzu sind die bereits mit (4.33) vorgestellten BDF–Verfahren mit variabler Schrittweite und Ordnung, einer deren bekanntester Vertreter ist in dem Integrationscode DASSL zu sehen, [BrenanCampbellPetzold96]; dieser kommt auch im Rahmen dieser Arbeit zur Anwendung.

5.2 Koordinatenwahl zur effizienten Verzweigungsanalyse

Der Übergang auf eine Formulierung der Bewegungsgleichungen als DAGL–System (5.1) erfordert entweder die Erweiterung der Verfahren zur Verzweigungsanalyse¹ auf diese Deskriptorform oder aber die Reduktion der Bewegungsgleichungen auf Minimalform und damit auf ein GDGL–System (3.2). Da die Deskriptorform aufgrund der schleifenschließenden Zwangsbedingung (5.1c) bei $2n_f = 2(n_p - n_\lambda)$ verbleibenden Systemfreiheitsgraden auf einen Deskriptorvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$ mit redundanten Komponenten führt, stellt sich in diesem Zusammenhang auch die Frage, inwieweit einzelne oder alle redundanten Koordinaten überhaupt Beachtung innerhalb der Verzweigungsalgorithmen finden. Zur Diskussion stehen die folgenden drei Zustandsformulierungen:

1. Deskriptorvektor: $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$,
2. Erweiterter Zustandsvektor: $\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$,
3. Vektor der Minimalkoordinaten: $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$.

Dabei sind unter Beachtung der immanenten Index– und Driftproblematik zur Berechnung der eingepprägten Kräfte $\mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ sowie zur Sicherstellung konsistenter Anfangsbedingungen vor einem Integrationsstart die redundanten Koordinaten konsistent bereitzustellen. Die drei Zustandsformulierungen sollen im Folgenden näher analysiert werden.

¹Diese sollen hier und im Folgenden unter dem Begriff *Verzweigungsalgorithmen* zusammengefasst werden. Bezeichnet seien damit die in Bezug auf PATH in den Kapiteln 3 und 4 beschriebenen Verfahren zur direkten Berechnung stationärer und periodischer Lösungen (hierbei insbesondere die erweiterten Methoden aus Abschnitt 4.3), zu deren Stabilitätsanalyse sowie zur Einbettung in eine Pfadverfolgung.

Deskriptorvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$

Bei Verwendung des vollständigen Deskriptorvektors \mathbf{y} wären in den Verzweigungs-
algorithmen, ähnlich wie zuvor für die Zeitintegration geschildert, die Zwangsbedin-
gungen (5.1c) sowie die versteckten Zwangsbedingungen (5.1d) zu berücksichtigen.
Zur Sicherstellung der Konsistenz der berechneten Lösung wäre darüber hinaus noch
die Einhaltung der aus der Beschleunigungsnebenbedingung (5.1e) folgenden Forde-
rung (5.4) zu gewährleisten. Handzuhaben wäre also ein überbestimmtes Gleichungs-
system, wobei die algebraischen Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ noch gesonderte Beachtung erforderten. Auf
diese Weise ist allerdings lediglich der durch die Korrektoriteration der Pfadverfolgung
(siehe Abschnitt 3.2.2) errechnete Endzustand – ein Punkt einer stationären oder peri-
odischen Lösung – konsistent. Daneben stellt sich im periodischen Fall noch das Problem,
innerhalb der Korrektoriteration vor jedem Neustart einer Integration zur Berechnung der
Poincaré–Abbildung (4.9) konsistente Anfangsbedingungen \mathbf{y}_0 zu garantieren. Technisch
sehr aufwändig gestaltet sich dabei die Tatsache, dass der Deskriptorvektor \mathbf{y} innerhalb
der Iterationsschleife nicht verändert werden darf. Die algebraischen Zwangsbedingungen
könnten andererseits aber auch durch die aus (5.3)/(5.4) abgeleiteten Differentialglei-
chungen für die Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ ersetzt werden, freilich sind dann wiederum
Drift–off–Effekte zu gewärtigen. Insbesondere zur Untersuchung periodischen Verhaltens
erscheint damit insgesamt gesehen der Deskriptorvektor \mathbf{y} als weniger geeignet zur Aus-
weitung der Verzweigungsanalyse von PATH auf DAGL–Systeme.

Erweiterter Zustandsvektor $\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$

Um die Zwangskräfte $\boldsymbol{\lambda}$ aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren, ist deren Bestim-
mungsgleichung (5.3) lediglich in die Dynamikgleichung (5.1b) einzusetzen, es entsteht
das auf $2n_p$ Gleichungen reduzierte gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e - \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^T)^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_e + \mathbf{v}^T \mathbf{G}_p \mathbf{v}). \quad (5.8b)$$

Hängen jedoch die eingepprägten Kräfte von den verallgemeinerten Zwangskräften ab,
 $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$, muss das dann nichtlineare Gleichungssystem (5.4) vor jeder Auswer-
tung des Kraftvektors \mathbf{f}_e iterativ nach den Zwangskräften $\boldsymbol{\lambda}$ gelöst werden – ein nicht zu
vernachlässigender Zusatzaufwand. Da das resultierende System (5.8) auf der Index–1–
Formulierung (5.1a), (5.1b), (5.1e) der Bewegungsgleichungen aufbaut, ist auch hier wieder
die Driftproblematik zu beachten. Dabei darf der Zustandsvektor \mathbf{x} zur Sicherstellung
konsistenter Koordinaten innerhalb eines Iterationsschrittes des Korrektors, wie beim
Deskriptorvektor bereits beschrieben, nicht verändert werden, Konsistenz ist also nur
durch eine direkte Anbindung der Zwangsbedingungen erreichbar.

Vektor der Minimalkoordinaten $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$

Werden neben den algebraischen auch die redundanten dynamischen Koordinaten aus
Deskriptorvektor und Deskriptorform eliminiert, ergeben sich die Bewegungsgleichungen
in *Minimal– oder Zustandsform* als äquivalentes System von $2n_f = 2(n_p - n_\lambda)$ gewöhn-
lichen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n_f}, \quad \bar{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^{2n_f} \rightarrow \mathbb{R}^{2n_f}. \quad (5.9)$$

Die Verzweigungsalgorithmen werden dabei auf eine solche Minimalform angewandt, bauen also auf dem Zustandsvektor \mathbf{z} auf, wohingegen (im periodischen Fall) die nominellen Bewegungsgleichungen nach wie vor in der Deskriptorformulierung (5.7) integriert werden. Zwar existieren zur direkten Integration einer Zustandsform (5.9) entsprechend modifizierte Integrationsverfahren, vorgestellt z.B. in [WehageHaug82, PotraRheinboldt91, Leister92], jedoch spricht eine Reihe von Gründen gegen deren Anwendung im Rahmen der hier beschriebenen Verzweigungsanalyse: Wie bereits erwähnt, wurde zur direkten Integration von DAGL–Systemen in den letzten Jahren eine ganze Reihe von effizienten und leistungsstarken Lösungsalgorithmen entwickelt und software–technisch umgesetzt, [DeuffhardBornemann94, AscherPetzold98], von denen mit dem Code DASSL ([BrenanCampbellPetzold96]) ein sehr häufig genutzter Vertreter verfügbar ist. Wie in Abschnitt 4.3.4 beschrieben, erlaubt dessen Derivat DAGSL die synchrone Integration des nominellen Systems und der VDGL und damit die Bestimmung der erforderlichen Sensitivitäten $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{y}_0$. Und nicht zuletzt ist SIMPACK im Hinblick auf eine Deskriptorform (5.1) hin optimiert, [Rulka98].

Einerseits gilt es also auch bei Verwendung einer Zustandsform (5.9) zur Verzweigungsanalyse, einen vollständigen Satz konsistenter Koordinaten \mathbf{y} vor jedem Integrationslauf (periodisch) oder vor jeder Auswertung der rechten Seite von (5.1) (stationär) aus den verbliebenen Minimalkoordinaten \mathbf{z} zu bestimmen. Andererseits finden jedoch weder die algebraischen noch die redundanten dynamischen Koordinaten Eingang in Korrekturiteration und Fortsetzungsalgorithmus. Dies erweist sich als erheblicher Vorteil gegenüber den anderen beiden Koordinatenformulierungen. Dem nicht unerheblichen Mehraufwand zur internen, iterativen Auswertung der Zwangsbedingungen (5.1c), (5.1e), (5.4) steht die minimierte Größe der Zustandsform (5.9) der Bewegungsgleichungen gegenüber. Besonders deutlich wirkt sich diese Tatsache bei der direkten Bestimmung periodischer Lösungen auf der Grundlage der VDGL aus (Abschnitt 4.3): Wie noch gezeigt werden wird, müssen lediglich die Sensitivitäten bezüglich der $2n_f$ Minimalkoordinaten \mathbf{z} simultan mit der nominellen Lösung der Deskriptorgleichungen (5.7) integriert werden, die Sensitivitäten bezüglich der insgesamt $3n_\lambda$ algebraischen und redundanten dynamischen Koordinaten werden nicht benötigt. Ein weiterer Vorteil der Minimalform (5.9) ist, dass es sich dabei um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen handelt, der Grundlage der in den Kapiteln 3 und 4 beschriebenen Algorithmen, und dass somit die eigentlichen Verzweigungsalgorithmen selbst nahezu unverändert verwendet werden können. Wie später noch zu zeigen sein wird, ist darüber hinaus für eine verlässliche Stabilitätsanalyse sowohl stationärer als auch periodischer Lösungen die Zustandsform der Deskriptorform aus numerischen Gründen vorzuziehen.

Mit der Reduktion der Bewegungsgleichungen von der Deskriptorform (5.1) auf die Zustandsform (5.9) in Minimalkoordinaten $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$ ist ein geeignetes Werkzeug zur Verzweigungsanalyse sowohl stationären als auch periodischen Verhaltens von MKS mit kinematisch geschlossenen Schleifen gefunden. Dabei ist zu beachten, dass eine Zustandsform eines gegebenen DAGL–Systems keineswegs eindeutig ist. Deshalb sollen nach der allgemeinen Definition einer Zustandsform bzw. der Transformationen Deskriptorform \leftrightarrow Zustandsform zunächst drei unterschiedliche, oft angewandte Zustandsformulierungen vorgestellt und in Bezug auf eine Verzweigungsanalyse bewertet werden.

5.3 Zustandsform der Bewegungsgleichungen eines MKS

Grundgedanke einer Zustands- oder Minimalform ist, die Bewegung eines allgemeinen MKS mittels eines GDGL-Systems bestehend aus einem minimalen Satz an $2n_f$ Gleichungen in $2n_f$ Minimalkoordinaten \mathbf{z} vollständig zu beschreiben. Besondere Aufmerksamkeit erfordern dabei kinematisch geschlossenen Schleifen, da diese oft nur über einen impliziten Zusammenhang der Form (5.1c) abstrahiert werden können. Wie in [Leister92, Bestle94] dargestellt, kann die Reduktion auf Minimalform bereits in das Aufstellen der Bewegungsgleichungen einfließen. Da aber SIMPACK die Bewegungsgleichungen in der Deskriptorform (5.1) aufstellt, soll im Weiteren nur der Weg der nachträglichen numerischen Reduktion dieser Formulierung auf eine Zustandsform – ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen – beschrieben werden.

Die numerische Reduktion auf eine Zustandsform kann auch als Übergang zu einer lokalen Parametrisierung der Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} (5.6) der Bewegungsgleichungen aufgefasst werden. Oft angewandt werden hierzu Vorgehensweisen, die auf dem bereits auf S. 88 erwähnten Prinzip der *Koordinatenzerlegung* aufbauen, der expliziten Aufteilung der verallgemeinerten Lagezustände \mathbf{p} in abhängige Koordinaten \mathbf{p}_a und in unabhängige Minimalkoordinaten \mathbf{p}_u , [WehageHaug82] („coordinate partitioning“). Nach analoger Aufteilung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} kann im $(2n_f)$ -dimensionalen Vektor \mathbf{z} der Minimalkoordinaten zusammengefasst werden, $\mathbf{z} := \mathbf{x}_u := (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$. Dabei sind die Abhängigen $\mathbf{x}_a := (\mathbf{p}_a^T, \mathbf{v}_a^T)^T$ so festzulegen, dass diese gemeinsam mit den algebraischen Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ aus den Zwangsbedingungen (5.1c)–(5.1e) durch Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme bestimmt und somit aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden können. Es bleibt ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in $2n_f$ Minimalkoordinaten, die Zustandsform.

5.3.1 Die Zustandsform: Definition und Transformationen

Zur Herleitung der Reduktion auf Zustandsform erweist es sich als vorteilhaft, die Bewegungsgleichungen (5.1) nach entsprechenden Umformungen als GDGL- oder index-reduziertes DAGL-System mit *Integralinvarianten* zu interpretieren. Die Invarianten beschränken dabei nicht die Lösung, [Eich-SoellnerFührer98], sondern stellen vielmehr zusätzliche Information über die Eigenschaften der Lösung dar. Betrachtet man beispielsweise die Index-1-Formulierung der Bewegungsgleichungen als DAGL-System mit Invarianten,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.10b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}^T \mathbf{G}_p \mathbf{v} \quad (5.10c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(\mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad (5.10d)$$

wird die $(2n_\lambda)$ –dimensionale Invariante

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

von Lage– und Geschwindigkeitsnebenbedingung (5.1c), (5.1d) gebildet. Das bedeutet aber, dass diese Invariante die $2n_f$ –dimensionale Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} der freien Bewegung im \mathbb{R}^{n_x} gemäß (5.6) definiert (\mathcal{M} ist also unabhängig von der gewählten Formulierung der Bewegungsgleichungen und deren differentiellem Index).

Zur weiteren Reduktion auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Invarianten werden die verallgemeinerten Zwangskräfte $\boldsymbol{\lambda}$ aus Beschleunigungszwangsbedingung und Dynamikgleichung explizit gemäß Gleichung (5.3) oder implizit durch Lösen des NLGS (5.4) berechnet und in die Dynamikgleichung (5.1b) eingesetzt,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.12b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) . \quad (5.12c)$$

Mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$ ergibt sich die kompakte Darstellung eines GDGL–Systems mit Invarianten,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.13a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) . \quad (5.13b)$$

Die folgende formale Definition einer Zustandsform geht auf [Eich92] bzw. [Eich-SoellnerFührer98] zurück, Ausgangspunkt ist die Formulierung der Bewegungsgleichungen als GDGL–System mit Invarianten (5.13). Sei $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ eine Abbildung $\mathbf{c} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ (hier: $n_c = 2n_\lambda$) und $\mathbf{H} = \partial \mathbf{c} / \partial \mathbf{x}$ habe Vollrang. Der Punkt $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^{n_x}$ liege auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} nach (5.6), $\mathbf{c}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{0}$, und man wähle eine vorerst konstante $n_x \times (n_x - n_c)$ –Matrix $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}_c)$ so, dass die quadratische $(n_x \times n_x)$ –Gesamtmatrix

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x}_c) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}_c) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{p}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{G}_p & \mathbf{G}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

regulär ist, d.h. die Spalten dieser Matrix spannen den gesamten Raum \mathbb{R}^{n_x} auf. Mit Hilfe des *Satzes über implizite Funktionen* ([BronsteinSemendjajew85]) kann dann gezeigt werden, dass Umgebungen $U_1(\mathbf{x}_c) \subset \mathbb{R}^{n_x}$ und $U_2(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{n_x - n_c}$ existieren, in denen für alle $\mathbf{z} \in U_2$ das kombinierte System

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x}_c) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \quad (5.15a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (5.15b)$$

eine eindeutige Lösung $\mathbf{x} \in U_1$ besitzt². Diese Lösung wird durch die inverse Abbildung

$$\phi_{\mathbf{x}_c} : U_2(\mathbf{0}) \rightarrow U_1(\mathbf{x}_c), \mathbf{z} \mapsto \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \phi_{\mathbf{x}_c}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(\phi_{\mathbf{x}_c}(\mathbf{z})) = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

²Das System (5.15) stellt ein NLGS der Form $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dar. Mit (5.14) wird also die Regularität der Jacobimatrix $\partial \bar{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{x}$ gefordert.

beschrieben. Differentiation von (5.15a) führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen,

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x}_c) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{f}(\phi_{\mathbf{x}_c}(\mathbf{z})) \quad (=:\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z})) , \quad (5.17)$$

die *lokale Zustandsform* von (5.13) in U_1 bezüglich der (konstanten) Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x}_c)$.

Die Transformation auf die Zustandsform (5.17) ist also nur in Verbindung mit der inversen Abbildung (5.16) zur Auswertung von $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\phi_{\mathbf{x}_c}(\mathbf{z}))$ möglich, und zwar angewandt auf die GDGL-Form mit Invariante (5.13). Insgesamt bedarf es also der Transformation von Minimalkoordinaten \mathbf{z} auf den Deskriptorvektor \mathbf{y} , diese kann in 2 Schritten durchgeführt werden: Die Auswertung der inversen Abbildung führt zunächst den Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n_f}$ in den Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ über und erfordert somit beispielsweise die iterative Auflösung des NLGS $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, gebildet aus den Zwangsbedingungen (5.1c) und (5.1d), nach den redundanten Koordinaten \mathbf{x}_a . Darauf aufbauend folgen die verallgemeinerten Zwangskräfte $\boldsymbol{\lambda}$ im Fall $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\lambda})$ durch Lösen des impliziten Zusammenhangs (5.4). Zusammengefasst bleibt die erweiterte inverse Abbildung $\phi_e(\mathbf{z})$ mit

$$\phi_e : \mathbb{R}^{2n_f} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y} \quad \text{mit} \quad \phi_e(\mathbf{z}) = \mathbf{y} = (\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T, \quad \mathbf{x} = \phi(\mathbf{z}) . \quad (5.18)$$

Die Zustandsform (5.17) ist *nicht* eindeutig, sondern hängt vielmehr von der Wahl der Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ ab. Daneben kann eine Zustandsform auch bereits auf einer anderen Invarianten (5.13b) aufbauen, betrachtet wird z.B. in [PotraRheinboldt91, Bestle94] lediglich die Lagezwangsbedingung (5.1c), $\mathbf{c}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}(\mathbf{p}) (= \mathbf{0})$. Die Auswahl einer speziellen Zustandsform kann also im Hinblick auf unterschiedliche Zielsetzungen erfolgen. Steht beispielsweise die numerische Stabilität im Vordergrund, erweist sich die Projektion der Zustände orthogonal zum Tangentialraum der Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} nach (5.6) als vorteilhaft, [Führer88, Leister92]. Erreicht wird eine solche *Tangentialraumparametrisierung* dadurch, dass die Spalten der Matrix $\tilde{\mathbf{V}}$ den Nullraum von $\mathbf{H}:=\mathbf{c}_{\mathbf{x}}$ aufspannen, also

$$\mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (5.19)$$

gefordert wird; durch die Einschränkung $\tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$ kann darüber hinaus noch eine orthogonale Parametrisierung gefunden werden. Hängen die eingepprägten Kräfte \mathbf{f}_e in (5.1) nicht von den verallgemeinerten Zwangskräften $\boldsymbol{\lambda}$ ab, können letztere durch Wahl einer geeigneten Submatrix \mathbf{V} von $\tilde{\mathbf{V}}$ mittels der eingeforderten Orthogonalität

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0} , \quad \dim \mathbf{V} = n_p \times (n_p - n_\lambda) , \quad (5.20)$$

aus (5.1b) eliminiert werden. Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal ist auch, ob dem bereits mehrfach erwähnten Prinzip der Koordinatenzerlegung gefolgt wird und somit die Minimalkoordinaten auch physikalisch interpretierbar bleiben (koordinatenerhaltende Zustandsformen). Im Folgenden sollen nun drei unterschiedliche Varianten der Zustandsform vorgestellt und in Bezug auf deren Anwendung im Rahmen einer Verzweigungsanalyse bewertet werden.

Zustandsform ①

Eine erste Vorgehensweise baut auf der Forderung nach einer koordinatenerhaltenden Zustandsform auf, wobei zusätzlich noch eine Tangentialraumparametrisierung sichergestellt

Durch Linksmultiplikation von (5.12a), (5.12b) mit $\tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x})$ folgt eine (5.17) entsprechende Zustandsform (der (5.17) zu Grunde liegende Zusammenhang $\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}$ gilt hier jedoch wegen $\tilde{\mathbf{V}}^T = \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{x})$ nicht)

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \underbrace{\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{V}}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_e - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}))},$$

bzw. zusammengefasst

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}_e - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Durch die Skalierung mit der Massenmatrix \mathbf{M} entfällt deren Invertierung. Darüberhinaus werden im Falle von $\mathbf{f}_e \neq \mathbf{f}_e(\boldsymbol{\lambda})$ aufgrund der geforderten Orthogonalität (5.20) $\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{0}$ gleichzeitig auch die verallgemeinerten Zwangskräfte $\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}$ aus den Bewegungsgleichungen eliminiert. Dennoch bleibt aber die Erfordernis, die inverse Abbildung (5.16) durch Iteration eines entsprechenden NLGS durchzuführen.

Zustandsform ③

Für die dritte Zustandsform wird allein die Forderung erhoben, dem Prinzip der Koordinatenzerlegung zu folgen. Dazu wird die Aufteilung der Zustandsvektoren \mathbf{p} und \mathbf{v} in Unabhängige und Abhängige a priori durchgeführt,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u &= \mathbf{V}^T \mathbf{p}, & \mathbf{v}_u &= \mathbf{V}^T \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{p}}_u &= \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{p}}, & \dot{\mathbf{v}}_u &= \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

und dann nicht mehr verändert. Diese Aufteilung erfolgt genau so, wie bereits bei der Berechnung konsistenter Anfangsbedingungen in Abschnitt 5.1 beschrieben: Die Gesamtheit der Lagekoordinaten $\{p_k\}$ wird in zwei sich gegenseitig ausschließende Teilmengen von Lagekoordinaten aufgeteilt, $\{p_{u,i}\} \subset \{p_k\}$, $\{p_{a,j}\} \subset \{p_k\}$ wobei $\{p_{u,i}\} \cap \{p_{a,j}\} = \{\}$, $i = 1, \dots, n_f$, $j = 1, \dots, n_\lambda$, $k = 1, \dots, n_p$. Die nunmehr konstante Extraktionsmatrix \mathbf{V}^T soll also nach entsprechender Umsortierung der Komponenten der Zustandsvektoren auf die Reihenfolge $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{p}_a^T)^T$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_u^T, \mathbf{v}_a^T)^T$ die Form

$$\mathbf{V}^T = (\mathbf{I}^{n_f \times n_f} \mid \mathbf{0}^{n_f \times n_\lambda}), \quad \dim \mathbf{V}^T = (n_p - n_\lambda) \times n_p,$$

aufweisen. Linksmultiplikation der Differentialgleichungen von (5.12) mit \mathbf{V}^T und linksseitige Beachtung der Zerlegung (5.23) führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in Minimalform – eine weitere Zustandsform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_u \\ \dot{\mathbf{v}}_u \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{V}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^T \end{pmatrix}}_{=: \tilde{\mathbf{V}}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_e(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_a(\mathbf{x}_u)) - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_u)) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}))}. \quad (5.24)$$

Auch hier muss wieder die inverse Abbildung (5.16) ausgeführt werden.

Die Projektionsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ aus (5.24), und damit die Zustandsform ③ selbst, stellt eine erhebliche Vereinfachung der Zustandsform ② mit $\tilde{\mathbf{V}}$ gemäß (5.22) dar. Dabei bleibt die in $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ enthaltene Krümmungsinformation unberücksichtigt und die Orthogonalitätsbedingungen (5.19) und (5.20) sind im Allgemeinen nicht erfüllt (was auch keineswegs eine notwendige Voraussetzung einer Zustandsform darstellt). Aufgrund der konstanten Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ kann sich folglich die damit festgelegte Auswahl an Minimalkoordinaten durch das Auftreten von Singularitäten als lokal ungeeignet erweisen. In diesem Fall wird eine vollständige Erfassung der Bewegung auf der Zwangsmannigfaltigkeit mit den gewählten Minimalkoordinaten verhindert. Deshalb ist bei der Partitionierung der Zustandskomponenten unbedingt darauf zu achten, dass die Regularität der Gesamtmatrix aus (5.14) so weit als möglich während der gesamten Rechnung gegeben ist – eine Forderung, der im Falle von Fahrzeugmodellen in der Regel nachgekommen werden kann, die dennoch aber eine gewisse Sorgfalt bei der Festlegung der unabhängigen Koordinaten erforderlich macht.

Andererseits ist die Gültigkeit dieser Zustandsform im Gegensatz zu ① und ② nicht mehr an einen bestimmten Lösungspunkt \mathbf{x}_c in (5.16) gebunden: Mit $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ und $\mathbf{z} := \mathbf{x}_u := (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{v}_u^T)^T$ folgt aus (5.15a) die einfach umzusetzende Transformation

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n_f}. \quad (5.25)$$

Ein Bestimmungssystem, das eine Zustandsform definiert, kann analog zu (5.15) auch allein für den Lagevektor \mathbf{p} aufgestellt werden, als Invariante der zu Grunde liegenden GDGL–Form (5.13) wird dann lediglich die Lagezwangsbedingung verwendet, $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{p}) := \mathbf{g}(\mathbf{p}) (= \mathbf{0})$, [PotraRheinboldt91]. Für die Jacobimatrix der Invarianten aus (5.14) gilt dann $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{c} / \partial \mathbf{p} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$. Eine Tangentialraumparametrisierung bezüglich der entsprechend reduzierten Zwangsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{\mathbf{g}} := \{(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$ kann dann auf der Basis der Orthogonalitätsbedingung (5.20) für $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ erreicht werden, einem unterbestimmten Gleichungssystem, das mittels einer geeigneten Faktorisierung von \mathbf{G} bzw. \mathbf{G}^T jeweils aktuell gelöst wird. Wird die resultierende Matrix $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{p})$ entsprechend (5.24) zur Reduktion verwendet, kann die entstehende Zustandsform als erweiterte Variante der Zustandsform ③ mit aktuell angepasster Projektionsmatrix $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{p})$ interpretiert werden. Im Vergleich zur Zustandsform ② fehlt jedoch der Krümmungsterm mit $\mathbf{\Gamma}$. Vergleichbare Zustandsformen gelangen auch in [Leister92, AscherPetzold98] zur Anwendung, und zwar jeweils im Rahmen einer Integration von auf Zustandsform reduzierten Bewegungsgleichungen. Dabei wird allerdings die Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ so lange wie möglich konstant gehalten, erst im Falle einer drohenden Singularität, ein entsprechender Test ist in [Leister92] vorgeschlagen, wird dann auf eine neue Parametrisierungsmatrix umgeschaltet.

Entscheidende Bedeutung kommt bei dieser Variante der Zustandsform ③ der Lösung des unterbestimmten Gleichungssystems (5.20), $\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{0}$, zu. In [PotraRheinboldt91] wird hierfür beispielsweise eine QR –Zerlegung vorgeschlagen ([Stoer99]),

$$\mathbf{G}^T = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = [\mathbf{Q}_1^{n_p \times n_\lambda} \quad \mathbf{Q}_2^{n_p \times n_p - n_\lambda}] \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

wobei \mathbf{Q} eine quadratische, orthogonale Matrix darstellt und die $(n_\lambda \times n_\lambda)$ -dimensionale Matrix \mathbf{R} obere Dreiecksform aufweist. Als Transformationsmatrix folgt daraus $\mathbf{V}(\mathbf{p}) := \mathbf{Q}_2(\mathbf{p})$, womit $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{p})$ und damit auch die Zustandsform gemäß (5.17) eindeutig bestimmt sind. Eine ähnliche Vorgehensweise wird auch in [Eich-SoellnerFührer98, S. 38] beschrieben, allerdings wird dort eine koordinatenerhaltende Zustandsform erreicht. Eine Übersicht über andere Algorithmen, die zur Lösung von (5.20) angewendet werden, ist in [Führer88] gegeben.

Zur Verdeutlichung soll nun die Transformation von der Deskriptorform auf die Zustandsform ③ anhand der Projektionsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ bzw. deren Submatrix \mathbf{V}^T für einen starren Radsatz im Gleis hergeleitet werden. Abschnitt 2.1.4 folgend, weist ein Radsatz im Gleis vier Lagefreiheitsgrade auf. Der Lagevektor $\mathbf{p} = (s, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)^T$ setzt sich bei der hier gewählten Beschreibungsweise zusammen aus einer großen, das Trassensystem T festlegenden Bewegung s entlang der Trasse, der Eigendrehung ϑ des Radsatzes sowie den vier verbleibenden kleinen Relativbewegungen des Radsatzsystems W bezüglich des Trassensystems T . Dies sind die Querverschiebung y , die Vertikalverschiebung z , der Rollwinkel φ und der Gierwinkel ψ . Die Zwangsbedingung (5.1c) auf Lageebene besteht aus links- und rechtsseitiger Kontaktbedingung (2.4) oder (2.6) zwischen Rad und Schiene und hängt nur von den vier kleinen Relativbewegungen ab, $\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{g}(y, z, \varphi, \psi) = \mathbf{0}$, [Netter98]. Es bleibt $n_p = 6$, $n_\lambda = 2$, $n_f = 4$.

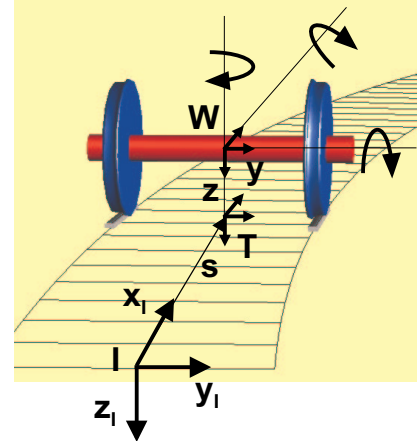


Abbildung 5.1: Komponenten des Zustandsvektors \mathbf{p} der Lage für einen starren Radsatz im Gleis.

Aus den Abhängigkeiten der Zwangsbedingung folgt, dass zur Erfüllung der Regularitätsbedingung für die Gesamtmatrix in (5.14) unter Beachtung des Gradienten \mathbf{H} in jedem Fall die beiden großen Bewegungen s, ϑ als unabhängige Koordinaten festgelegt werden müssen. Daneben werden üblicherweise Quer- und Gierbewegung als weitere Minimalkoordinaten gewählt, [Netter98, FisetSamin94, Jaschinski90], $\mathbf{p}_u = (s, y, \vartheta, \psi)^T$, als abhängige Koordinaten bleiben $\mathbf{p}_a = (z, \varphi)^T$. Die Reduktion auf Minimalkoordinaten stellt sich dann wie folgt dar ($\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_u^T, \mathbf{p}_a^T)^T$) folgt durch entsprechendes Umsortieren der Koordinaten aus dem Lagevektor \mathbf{p}):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s \\ y \\ \vartheta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s \\ y \\ z \\ \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s \\ y \\ \vartheta \\ \psi \\ z \\ \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}^*}.$$

5.3.2 Anwendung der Zustandsform zur Pfadverfolgung

Die Transformation von Deskriptor– auf Zustandsform bildet wie erwähnt eines der möglichen Prinzipien, auf denen eine Lösung der Bewegungsgleichungen (5.1) aufbauen kann. Eine solche Kombination wird in [Führer88] als „explizite Zustandsmethode“ schematisch vorgestellt. Dabei wird die Zustandsform inklusive der entsprechenden Transformationen während der Integration in jedem Teilschritt (Prädiktor– und Korrektorschritt) und damit auf die diskretisierte Trajektorie angewandt. Die verfahrensimmanente Sicherung der Regularität der Gesamtmatrix (5.14), gegeben beispielsweise mit den Zustandsformen ① und ② oder durch einen Wechsel der Minimalkoordinaten/Parametrisierungsmatrix, ist eine wesentliche Voraussetzung zur erfolgreichen Integration der Zustandsform.

Diesem Grundprinzip folgend, kann die in Abschnitt 3.2.2 vorgestellte Prädiktor–Korrektor–Methode zur Pfadverfolgung über das Hilfsmittel der Reduktion der Bewegungsgleichungen auf Zustandsform auch auf MKS in Deskriptorform (5.1) angewandt werden. Die Vorgehensweise wird zunächst anhand von Abb. 5.2 für den Fall der Korrekturiteration zur direkten Berechnung einer stationären Lösung bei als konstant angenommenem Verfolgungsparameter p^j schematisch beschrieben. Hierbei wird der Index l als Iterationszähler entsprechend der Newton–Gleichung (4.18) (diese gilt analog ganz allgemein für NLGS der Form $\mathbf{Q}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$) verwendet, der Index j bezeichnet hingegen gemäß Abschnitt 3.2.2 den j -ten Schritt „entlang des Pfades“. Selbiges Schema kann mit nur geringfügigen Anpassungen jedoch auch zur Ausführung eines Prädiktorschrittes bzw. bei der Verfolgung periodischer Lösungen angewendet werden; die entsprechenden Unterschiede werden im Anschluss vorgestellt.

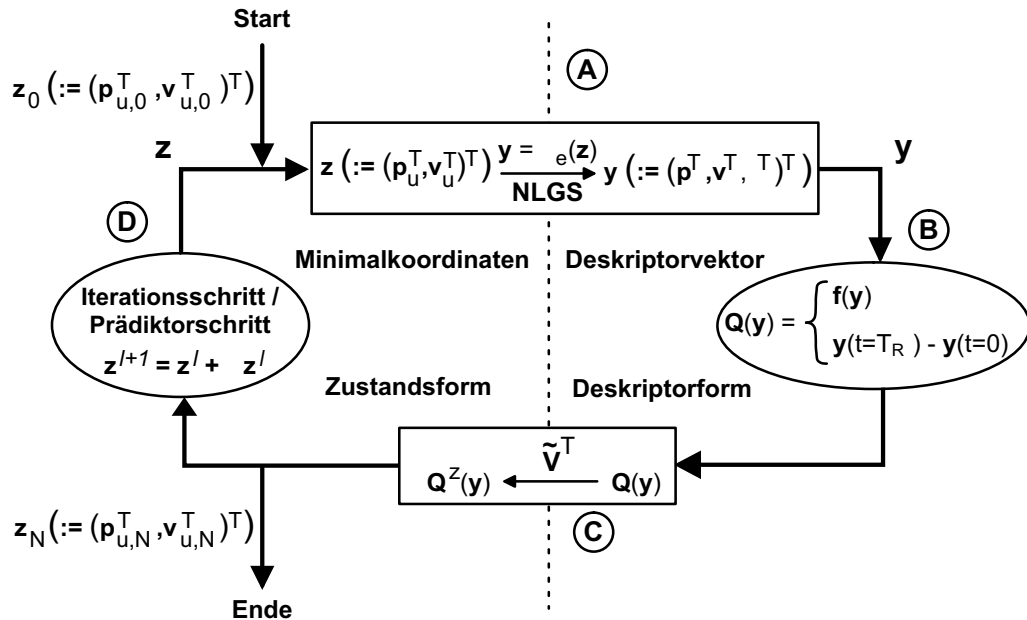


Abbildung 5.2: Prinzipschaubild für einen Teilschritt der Pfadverfolgung der Bewegungsgleichungen eines MKS, gegeben in Deskriptorform und transformiert auf Zustandsform ($z := (p_u^T, v_u^T)^T$ gilt nur bei Anwendung der Koordinatenzerlegung).

Da der angekoppelte MKS-Algorithmus die Bewegungsgleichungen in einer spezifischen Form aufbaut und auswertet – im Fall von SIMPACK ist das die Deskriptorform (5.1) – sind an entsprechender Stelle im Gesamtablauf zur Pfadverfolgung stationärer Lösungen Transformationen von der Zustandsform (5.17) auf die Deskriptorform und umgekehrt durchzuführen. Dem Prinzipschaubild 5.2 folgend, wird vor jeder Auswertung des Residuums $\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ der Grundgleichung (3.3) der Pfadverfolgung, $\mathbf{Q}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, durch die Projektion von \mathbf{y} auf die Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} nach (5.6) im Schritt ① von einer Zustandsform (5.17) auf die Deskriptorform (5.1) rücktransformiert. Numerisch gesehen bedeutet dies den Übergang vom aktuellen Zustandsvektor \mathbf{z} der Minimalkoordinaten auf den Deskriptorvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ mittels der erweiterten inversen Abbildung (5.18), $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{y}$ mit $\mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z})$, also die Iteration der aus den Zwangsbedingungen (5.1c)–(5.1e) folgenden nichtlinearen Gleichungssysteme.

Der konsistente Deskriptorvektor ist dann Eingangsgröße in die Berechnung des Residuums $\mathbf{Q}(\mathbf{y}) := \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z}))$ im Schritt ②, die sich Abschnitt 3.2.2 folgend im stationären Fall lediglich als Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichungen (5.1a), (5.1b) darstellt (entspricht der Auswertung der rechten Seite der Zustandsform (5.17), jedoch ohne die Projektion).

Vor der Bewertung des Residuums \mathbf{Q} wird im Schritt ③ durch Linksmultiplikation mit der Projektionsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}^T$ auf die Minimalform (5.17) transformiert,

$$\mathbf{Q}^z(\mathbf{y}) := \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z})) \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \mathbf{Q}^z \in \mathbb{R}^{2n_f}.$$

Schritt ④ baut demnach auf der Minimaldarstellung \mathbf{Q}^z des Residuums $\mathbf{Q}(\mathbf{y}(\mathbf{z}))$ auf. Ist das Konvergenzkriterium $\|\mathbf{Q}^z\| < \varepsilon \ll 1.0$ nicht erfüllt, schließt sich ein weiterer Newtonschritt der Korrekturiteration $\mathbf{Q}_z^{z,l} \Delta \mathbf{z}^l = -\mathbf{Q}^{z,l}$ zur Lösung des NLGS $\mathbf{Q}^z(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ an,

$$\mathbf{z}^{l+1} = \mathbf{z}^l + \Delta \mathbf{z}^l. \quad (5.26)$$

Das hochgestellte l bezeichnet dabei den l -ten Iterationsschritt *hin* zum aktuellen Lösungsast. Der Kreislauf schließt mit der Übergabe des Vektors \mathbf{z}^{l+1} der aktualisierten Minimalkoordinaten zur Rücktransformation auf die Deskriptorform des Schrittes ①. Die beiden Teilschritte ② und ③ werden im anschließenden Abschnitt 5.4 noch näher betrachtet.

Hat hingegen zu Beginn des Schrittes ④ die Iteration in ausreichender Güte konvergiert, schließt sich der Prädiktorschritt j an und das System wird „auf dem Pfad“ fortgeführt; siehe hierzu auch Abschnitt 3.2.2. Indem man den Index l durch j ersetzt, kann dieser Schritt bei Verwendung des Sekantenprädiktors (3.5) (und Vernachlässigung des Verzweigungsparameters p) ebenfalls durch (5.26) repräsentiert werden. Damit lassen sich aber dann auch die Prädiktorschritte j in das Ablaufschema in Abb. 5.2 einfügen. Allerdings folgt jetzt für den j -ten Fortsetzungsschritt *auf* dem aktuellen Lösungsast das Inkrement aus der Sekante (3.4), $\Delta \mathbf{z}^j := h^j \mathbf{t}^j$. Der Schätzwert ${}^p\mathbf{z}^{j+1}$ von \mathbf{z}^{j+1} wird dann in der beschriebenen Korrekturiteration verbessert.

Auch die Verfolgung periodischer Lösungen von DAGL-Systemen kann durch die Grundgleichung (3.3) der Pfadverfolgung und damit durch das Ablaufschema 5.2 dargestellt

werden. Der wesentliche Unterschied besteht in der Definition des Residuums $\mathbf{Q}(\mathbf{y})$, für das im periodischen Fall gemäß (4.10) $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) := \boldsymbol{\varphi}(T_R, \mathbf{s}) - \mathbf{s}$ angesetzt ist und das auf der Deskriptorform (5.1) aufbaut. Dabei dient der konsistente Deskriptorvektor \mathbf{y} als Ergebnis des Teilschrittes ① jetzt auch als Anfangsbedingung $\mathbf{y}(t_0) := \mathbf{s} := \mathbf{y}$ der erforderlichen Zeitintegration zur Auswertung des Flusses $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s})$; deren Basis ist die GGL–Formulierung (5.7) der Bewegungsgleichungen. Der Übergang auf die Minimaldarstellung \mathbf{Q}^z im Teilschritt ③ entspricht jetzt nach Elimination von $\boldsymbol{\lambda}$ der Koordinatentransformation (5.15a), unmittelbar darauf folgt dann noch die Projektion (4.13) in die Poincaré–Ebene. Der Rest des Ablaufschemas ist identisch zum oben beschriebenen stationären Fall. Auf die beiden Teilschritte ② und ③ wird in Abschnitt 5.5 noch näher eingegangen.

Die Einführung der Zustandsform führt also auf eine strikte Trennung des gesamten Rechenschemas auf Verfahrensebene in den erweiterten Zustandsraum \mathbb{R}^{n_y} von Deskriptorvektor und Deskriptorform und den Zustandsraum \mathbb{R}^{n_z} ($n_z = 2n_f$) von Minimalkoordinaten und Zustandsform. Die Auswertungen der Bewegungsgleichungen (5.1) sowie deren Integrationen (inklusive den VDGL (4.24) bzw. den Sensitivitätsgleichungen (4.42)) mittels der GGL–Formulierung (5.7) erfolgen demnach in einem inneren Block bezüglich \mathbb{R}^{n_y} . Alle übrigen Berechnungen der eigentlichen Pfadverfolgung inklusive der Korrekturiteration sowie der Stabilitätsanalyse sind in einem äußeren Block auf \mathbb{R}^{n_z} beschränkt.

Das beschriebene Schema verdeutlicht eine Problematik, die z.B. bei veränderlicher Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ der Zustandsform ② oder bei einem Wechsel der Minimalkoordinaten aufgrund einer drohenden Singularität auftritt; der letztere Fall soll hier stellvertretend skizziert werden. Jeder Prädiktorschritt baut auf den Minimalkoordinaten \mathbf{z}^{j-k} der vorhergehenden k Verfolgungsschritte auf, im Fall des Sekantenprädiktors (3.4) gilt $k = 1$. Um konsistente Koordinaten im Prädiktorschritt sicherzustellen, bedingt ein Koordinatenwechsel demnach entweder einen Neustart der Pfadverfolgung oder aber die nachträgliche Anpassung der k zurückliegenden Lösungspunkte $\mathbf{z}_{\text{alt}}^{j-k}$ über den Zustandsvektor \mathbf{x}^{j-k} auf die neuen Minimalkoordinaten: $\mathbf{z}_{\text{alt}}^{j-k} \Rightarrow \mathbf{x}^{j-k} \Rightarrow \mathbf{z}_{\text{neu}}^{j-k}$, [Leister92, S. 74ff].

Nach Abschnitt 3.1.1 ist ein Lösungsast ein Teil eines Verzweigungsdiagramms, der ein qualitativ gleich bleibendes Lösungsverhalten durch diskrete Lösungspunkte im Zustands–Parameter–Raum repräsentiert. Bei der Verfolgung eines Lösungsastes wird also eine rein quantitative, kleine Änderung eines zu Beginn näherungsweise vorgegebenen Lösungspunktes bei Variation eines Systemparameters betrachtet. Das bedeutet aber auch, dass im Zuge des in Abb. 5.2 skizzierten Ablaufschemas innerhalb einer auf einen Lösungsast beschränkten Pfadverfolgung eine Zustandsform nur auf qualitativ ähnliche Lösungspunkte angewandt wird. Bei entsprechend sorgfältiger a–priori–Partitionierung der Zustandskoordinaten erweist sich deshalb die relativ einfache und wenig aufwändig bestimmbare Zustandsform ③ mit konstanter Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ meist als ausreichend, auf diese wird deswegen im Folgenden stets auch zurückgegriffen. Jedoch sollte bei einer Pfadverfolgung die Regularität der Gesamtmatrix (5.14) zumindest gelegentlich geprüft werden, insbesondere auch bei Überschreiten eines Verzweigungspunktes und einem damit einhergehenden Wechsel des Lösungsastes. Ein entsprechender Test, allerdings im Rahmen der Anwendung der Reduktion auf Zustandsform zur Integration eines DAGL–Systems, wobei die Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ nur bei Bedarf angepasst wird, ist beispielsweise in [Leister92, S. 69ff] beschrieben.

5.4 Stationäre Gleichgewichtslösungen differentiell–algebraischer Systeme

Einer der Vorteile des Übergangs auf Zustandsform bei der Verzweigungsanalyse differentiell–algebraischer Systeme besteht darin, dass die im Hinblick auf GDGL–Systeme entwickelten Verfolgungsalgorithmen nahezu ohne Änderung angewandt werden können. Der prinzipielle Ablauf ist im vorangehenden Abschnitt bereits dargelegt, im Folgenden sollen die Besonderheiten bei der Verfolgung stationärer Lösungen (siehe hierzu Fußnote 1 in Abschnitt 3.1.1) herausgearbeitet werden. Der Schwerpunkt des Abschnitts wird indes von der Fragestellung gebildet, inwieweit die Reduktion auf Zustandsform die Eigenwerte des stationären Systems und damit dessen Stabilitätsanalyse beeinflusst.

5.4.1 Bestimmung stationärer Gleichgewichtslösungen

Eine stationäre Lösung der Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems zeichnet sich durch verschwindende Geschwindigkeits– und Beschleunigungszustände aus, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Nach der Reduktion der ursprünglichen Deskriptorform (5.1) auf eine Zustandsform (5.17), $\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{f}(\phi_e(\mathbf{z}))$, bleibt die in Abschnitt 3.2.2 bereits beschriebene Aufgabe, das $2n_f$ –dimensionale nichtlineare Gleichungssystem $\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}_s)$ nach den $2n_f$ Minimalkoordinaten \mathbf{z}_s aufzulösen³. Da die Zustandsform eine der Deskriptorform äquivalente Darstellung der Bewegungsgleichungen bedeutet, ist mit der stationären Lösung \mathbf{z}_s in Minimalkoordinaten auch die eigentlich gesuchte stationäre Lösung \mathbf{y}_s des erweiterten Zustandsvektors der Deskriptorform gefunden; diese folgt durch Auswertung der erweiterten inversen Abbildung (5.18), $\mathbf{y}_s = \phi_e(\mathbf{z}_s)$.

Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass vor jeder Auswertung der Dynamikgleichung (5.1b) der Deskriptorvektor \mathbf{y} auf der Grundlage aller drei nichtlinearen Zwangsbedingungen aus den unabhängigen Minimalkoordinaten \mathbf{z} entsprechend (5.18) generiert werden muss; zur Bestimmung stationärer Lösungen ist die Reduktion auf Zustandsform jedoch nicht unbedingt erforderlich. Ausgehend von der Index–3–Deskriptorform (5.1a)–(5.1c) erhält man eine stationäre Lösung auch direkt in Form des Deskriptorvektors \mathbf{y}_s durch Nullsetzen deren linker Seite und iterativer Lösung der $2n_p + n_\lambda$ resultierenden Gleichungen. Durch die Voraussetzung $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sind dabei die Index–1– und die Index–2–Nebenbedingungen stets trivial erfüllt. Unter den Gesichtspunkten Recheneffizienz und –genauigkeit steht also der Vergrößerung der Problemdimension die Vermeidung der internen Newton–Iterationen zur Bestimmung von $\mathbf{y} = \phi_e(\mathbf{z})$ gegenüber. Wie dann im Anschluss noch gezeigt werden wird, erweist sich zur Stabilitätsanalyse einer stationären Lösung unter numerischen Gesichtspunkten allerdings die Zustandsform als der Deskriptorform überlegen; aus diesem Grund wird auch zu deren direkter Berechnung der zuerst beschriebene Weg der Zustandsform gegangen.

³Durch Ausnutzung der Kinematikgleichung (5.1a) kann die Dimension des Problems auf einfache Weise halbiert werden. Berechnet werden dann nur die n_f Minimalkoordinaten der Lage.

5.4.2 Stabilitätsanalyse stationärer Gleichgewichtslösungen

Grundlage der Stabilitätsanalyse einer stationären Lösung $\mathbf{y}_s = (\mathbf{p}_s^T, \mathbf{v}_s^T, \boldsymbol{\lambda}_s^T)^T$ sind die linearen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (5.27a)$$

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{K} \mathbf{p} - \mathbf{D} \mathbf{v} - (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.27b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad (5.27c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{v} \quad (5.27d)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{v}}, \quad (5.27e)$$

die sich aus der Linearisierung der Bewegungsgleichungen (5.1) bezüglich \mathbf{y}_s ergeben. In dieser Darstellung sind sowohl die Massenmatrix \mathbf{M} als auch die Steifigkeits– (\mathbf{K}), die Dämpfungs– (\mathbf{D}) und die Zwangsmatrix ($\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T$) konstant:

$$\begin{aligned} -\mathbf{K} &:= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_s, \mathbf{v}_s, \boldsymbol{\lambda}_s} - \left. \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_s} \cdot \boldsymbol{\lambda}_s, & -\mathbf{D} &:= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{p}_s, \mathbf{v}_s, \boldsymbol{\lambda}_s}, \\ -\mathbf{Z} &:= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right|_{\mathbf{p}_s, \mathbf{v}_s, \boldsymbol{\lambda}_s}, & \mathbf{G} &:= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_s}; \end{aligned}$$

der Deskriptorvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$ beschreibt jetzt lediglich kleine Abweichungen von \mathbf{y}_s . Wird die Index–3–Form (5.27a)–(5.27c) der linearisierten Bewegungsgleichungen betrachtet,

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{D} & -(\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

muss zur Stabilitätsanalyse ob der Singularität von \mathbf{E} ein *verallgemeinertes Eigenwertproblem* der Form⁴

$$\mu \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{y}} \quad (5.29)$$

gelöst werden, [Eich-SoellnerFührer98]. Dabei repräsentiert $\bar{\mathbf{y}}$ den verallgemeinerten Eigenvektor zum verallgemeinerten Eigenwert μ . Die Eigenwerte μ_i folgen dann durch Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mu \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0. \quad (5.30)$$

Ein wesentliches Merkmal des verallgemeinerten Eigenwertproblems (5.29) ist, dass abhängig vom Index der gewählten linearen DAE–Formulierung aufgrund der auf die Zwänge zurückzuführenden Bewegungseinschränkungen in unterschiedlichem Maße unendliche Eigenwerte und Null–Eigenwerte (insgesamt $3n_\lambda$) auftreten. Numerisch können

⁴Um Verwechslungen mit den Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ vorzubeugen, werden hier die Eigenwerte mit μ bezeichnet.

die Eigenwerte μ_i stabil auf der Grundlage einer verallgemeinerten Schur–Zerlegung des singulären Matrizenbüschels $\mathbf{A} - \mu \mathbf{E}$ bestimmt werden, [GolubvanLoan96]; geeignet hierfür wäre beispielsweise das Programmpaket GUPTRI aus der Softwarebibliothek [Netlib].

Einen anderen Weg zur Vermeidung der numerisch problematischen Eigenwerte ($\mu = 0$, $\mu = \infty$), der dann im Folgenden auch beschritten werden soll, bietet die Reduktion des linearen DAGL–Systems (5.27) auf eine lineare, lokale Zustandsform (5.17) an. Zu untersuchen bleibt dann ein System linearer Differentialgleichungen in den $2n_f$ kleinen Abweichungen \mathbf{z} von \mathbf{z}_s ,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{ZF} \cdot \mathbf{z} , \quad \dim(\mathbf{A}_{ZF}) = 2n_f \times 2n_f .$$

Wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben, charakterisieren die Eigenwerte von \mathbf{A}_{ZF} die Stabilität der Lösung \mathbf{z}_s . Nun ergeben zwar die Formulierung als DAGL–System und eine daraus abgeleitete Zustandsform unter der Voraussetzung konsistenter Anfangswerte die gleiche Lösung, siehe dazu Abschnitt 5.3, es bleibt aber die Frage zu klären, inwieweit dies auch für die Eigenwerte der jeweiligen Linearformen und damit für die Stabilität einer stationären Lösung gilt.

Sei $\Lambda = \{\mu_1, \dots, \mu_{2n_f}\} \subset \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte (das Spektrum) einer linearisierten Zustandsform der nichtlinearen Systemgleichungen (5.1). Nach [Eich-SoellnerFührer98] ist die Menge der verallgemeinerten Eigenwerte des originären linearen DAGL–Systems vom Index 3 (5.28) bei konsistentem Systemzustand dann $\Lambda \cup \{\infty\}$. Dabei ist $\mu = \infty$ ein $3n_\lambda$ -facher Eigenwert, sein Eigenraum besitzt die Dimension n_λ . Bei Systemen mit reduziertem Index treten bei unverändertem Spektrum Λ daneben auch noch 0–Eigenwerte auf. Zur Stabilitätsanalyse einer stationären Lösung der Index–3–Form (5.1) ist es also vollkommen ausreichend, die $2n_f$ Eigenwerte einer daraus abgeleiteten, äquivalenten Zustandsform (5.17) zu berechnen.

Im Folgenden soll nun diese Identität der Spektren von DAGL–System und Zustandsform nachgewiesen werden. Die Vorgehensweise stützt sich auf [Eich-SoellnerFührer98, S. 74], wobei im Gegensatz dazu einerseits die Orthogonalitätsbedingung (5.20) $\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{0}$ für die Zustandsform nicht mehr gefordert wird sowie zwangskraftabhängige Reibkräfte $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ zugelassen werden. Andererseits beschränkt sich der Nachweis auf DAGL–Systeme vom Index 3 (5.1a)–(5.1c) und die Zustandsform ③. Grundgedanke des Nachweises ist es zu zeigen, dass beide Formulierungen formal auf das gleiche Eigenwertproblem führen, Ausgangspunkt seien die linearisierten Bewegungsgleichungen (5.27).

Eigenvektoren/Eigenwerte der Zustandsform ③

Auf der Basis der Formulierung als GDGL–System mit Invariante (5.13) besteht die Transformation auf die Zustandsform (5.24) in der linksseitigen Multiplikation der Differentialgleichungen (5.27a), (5.27b) mit der Verteilungsmatrix \mathbf{V}^T unter Berücksichtigung der inversen Abbildung (5.16). Es gilt also, die Zwangsbedingungen über die redundanten Koordinaten $\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_a(\mathbf{p}_u, \mathbf{v}_u)$ etc. in die Differentialgleichungen einzuarbeiten. Aufgrund der eindeutigen Koordinatenzerlegung, auf der die Zustandsform ③ basiert, kann die Lagezwangsbedingung (5.27c) in einen abhängigen und einen unabhängigen Anteil zer-

legt werden ($\mathbf{G}_u := \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{p}_u$, $\mathbf{G}_a := \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{p}_a$),

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{G}_u \mid \mathbf{G}_a) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_a \end{pmatrix} = \mathbf{G}_u \mathbf{p}_u + \mathbf{G}_a \mathbf{p}_a . \quad (5.31)$$

Da \mathbf{G}_a nach Voraussetzung quadratisch (n_λ) und regulär ist, kann nach den abhängigen Lagekoordinaten aufgelöst werden,

$$\mathbf{p}_a = -\mathbf{G}_a^{-1} \mathbf{G}_u \cdot \mathbf{p}_u ; \quad (5.32)$$

die analoge Zerlegung der Geschwindigkeitsnebenbedingung (5.27d) führt auf die abhängigen Geschwindigkeitskoordinaten

$$\mathbf{v}_a = -\mathbf{G}_a^{-1} \mathbf{G}_u \cdot \mathbf{v}_u . \quad (5.33)$$

Zur Berechnung der Lagrange Multiplikatoren λ wird die lineare Dynamikgleichung (5.27b) in die Beschleunigungszwangsbedingung (5.27e) eingesetzt und nach λ aufgelöst,

$$\lambda = - \underbrace{[\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T)]^{-1} \cdot \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1}}_{=: \bar{\mathbf{G}}} \cdot (\mathbf{K} \mathbf{p} + \mathbf{D} \mathbf{v}) . \quad (5.34)$$

Beachtet man nun, dass zur Transformation auf die Zustandsform ③ die Steifigkeits– und Dämpfungsterme der Linearform (5.27) ebenfalls in abhängige und unabhängige Anteile zerlegt werden können,

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{K}_u \mid \mathbf{K}_a) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_a \end{pmatrix} = \mathbf{K}_u \mathbf{p}_u + \mathbf{K}_a \mathbf{p}_a \quad \text{sowie} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{D}_u \mathbf{v}_u + \mathbf{D}_a \mathbf{v}_a ,$$

folgen mit (5.32) bzw. (5.33) sowohl der lineare Steifigkeits– als auch der lineare Dämpfungsterm zu

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{p} = \underbrace{(\mathbf{K}_u - \mathbf{K}_a \mathbf{G}_a^{-1} \mathbf{G}_u)}_{=: \bar{\mathbf{K}}} \cdot \mathbf{p}_u , \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = \underbrace{(\mathbf{D}_u - \mathbf{D}_a \mathbf{G}_a^{-1} \mathbf{G}_u)}_{=: \bar{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{v}_u$$

und damit auch die Zwangskräfte aus (5.34) zu

$$\lambda = -\bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{K}} \mathbf{p}_u + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{v}_u) .$$

Zusammengefasst wird die lineare Deskriptorform (5.27) in die lineare Zustandsform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_u \\ \dot{\mathbf{v}}_u \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{K}} & -\mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{D}} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}_{\text{ZF3}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{v}_u \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} \quad (5.35)$$

mit $(n_z \times n_z)$ –dimensionaler Systemmatrix \mathbf{A}_{ZF3} transformiert, für die Steifigkeits– und Dämpfungsmatrix gilt dabei

$$\tilde{\mathbf{K}} := \bar{\mathbf{K}} - (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{K}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{D}} := \bar{\mathbf{D}} - (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{D}} .$$

Die zur Stabilitätsanalyse erforderlichen $2n_f$ Eigenwerte μ_i folgen dann mit dem zugehörigen Eigenvektor $\bar{\mathbf{z}}_i = (\bar{\mathbf{p}}_{u,i}^T, \bar{\mathbf{v}}_{u,i}^T)^T$ aus der Lösung des Eigenwertproblems

$$\mu_i \mathbf{I} \cdot \bar{\mathbf{z}}_i = \mathbf{A}_{ZF3} \cdot \bar{\mathbf{z}}_i, \quad i = 1, \dots, n_z.$$

Ausgeschrieben für ein i verbleibt

$$\begin{aligned} \mu \bar{\mathbf{p}}_u &= \bar{\mathbf{v}}_u \\ \mu \bar{\mathbf{v}}_u &= -\mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{p}}_u - \mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_u. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Als nächstes soll nun das Eigenwertproblem für die Bewegungsgleichungen in der Index–3–Deskriptorform formuliert werden.

Eigenvektoren/Eigenwerte des Index–3–DAGL–Systems

Die bezüglich einer stationären Lösung \mathbf{y}_s linearisierten Bewegungsgleichungen (5.27) lauten in Matrizenschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{E}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} & -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}_{\text{DAGL}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}.$$

Da die Matrix \mathbf{E} singulär ist, ist nun das in Gleichung (5.29) bereits vorgestellte verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$\mu \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{v}} \quad (5.37a)$$

$$\mu \bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}} + (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \quad (5.37b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{p}} \quad (5.37c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{v}} \quad (5.37d)$$

$$\mu \mathbf{G} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (5.37e)$$

zu lösen, wobei $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{\mathbf{p}}^T, \bar{\mathbf{v}}^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T)^T$ den verallgemeinerten Eigenvektor zum Eigenwert μ darstellt; letzterer ergibt sich aus der charakteristischen Gleichung (5.30). Der Vollständigkeit halber sind die der Index–2– bzw. der Index–3–Zwangsbedingung entsprechenden Gleichungen mit angefügt.

Analog zur Transformation (5.23) der Zustandsvektoren für die Zustandsform ③ können die unabhängigen Komponenten der Eigenvektoren $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{v}}$ extrahiert werden,

$$\bar{\mathbf{p}}_u = \mathbf{V}^T \cdot \bar{\mathbf{p}}, \quad \bar{\mathbf{v}}_u = \mathbf{V}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}.$$

Nach Linksmultiplikation von (5.37a), (5.37b) mit \mathbf{V}^T verbleibt das Eigenwertproblem

$$\mu \bar{\mathbf{p}}_u = \bar{\mathbf{v}}_u \quad (5.38a)$$

$$\mu \bar{\mathbf{v}}_u = -\mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}} + (\mathbf{Z} + \mathbf{G}^T) \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \quad (5.38b)$$

wobei die redundanten Komponenten $\bar{\mathbf{p}}_a, \bar{\mathbf{v}}_a, \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ mittels der Zusatzgleichungen (5.37c)–(5.37e) noch zu entfernen sind. Diese folgen auf der Basis der Koordinatenzerlegung $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{p}}_u^T, \bar{\mathbf{p}}_a^T)^T$, $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{v}}_u^T, \bar{\mathbf{v}}_a^T)^T$ der Eigenvektoren analog den Zerlegungen und Umformungen (5.31)–(5.34), angewandt auf das verallgemeinerte Eigenwertproblem (5.37). Eingesetzt in (5.38) zeigt ein Vergleich mit (5.36) wie gefordert, dass das verallgemeinerte Index–3–Eigenwertproblem (5.37) in ein äquivalentes Eigenwertproblem, wie es auch aus der zugehörigen Zustandsform ③ folgt, überführt werden kann. Sei also $\bar{\mathbf{y}}$ ein verallgemeinerter Eigenvektor der Index–3–Formulierung der linearen Bewegungsgleichungen (5.27), d.h. $\bar{\mathbf{y}}$ erfülle das verallgemeinerte Eigenwertproblem (5.37) für den Eigenwert μ . Dann stellt nach (5.36) der daraus mittels \mathbf{V}^T abgeleitete Vektor $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{p}}_u^T, \bar{\mathbf{v}}_u^T)^T$ auch einen Eigenvektor zum identischen Eigenwert der Systemmatrix \mathbf{A}_{ZF3} der zugehörigen Zustandsform ③ dar. Umgekehrt gilt aber auch unter Beachtung der inversen Abbildung (5.16), dass wenn $\bar{\mathbf{z}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert μ von \mathbf{A}_{ZF3} ist, die redundanten Komponenten $\bar{\mathbf{p}}_a, \bar{\mathbf{v}}_a, \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ aus $\bar{\mathbf{z}}$ abgeleitet werden können, wodurch man den verallgemeinerten Eigenvektor $\bar{\mathbf{y}}$ zum Eigenwert μ des entsprechenden verallgemeinerten Eigenwertproblems $(\mathbf{E}, \mathbf{A}_{\text{DAGL}})$ des DAGL–Systems (5.27) erhält.

5.5 Periodische Lösungen differentiell–algebraischer Systeme

Berechnung und Analyse periodischer Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen wurden bereits in Kapitel 4 diskutiert. Die Erweiterung der dort vorgestellten Definitionen und Methoden auf differentiell–algebraische Gleichungssysteme der Form (5.1) wird im Folgenden entwickelt.

Die differentialgeometrische Betrachtung eines DAGL–Systems als System von Differentialgleichungen auf einer Mannigfaltigkeit liefert einen Ansatz zur Herleitung von Existenz und Eindeutigkeitsaussagen von dessen Lösungen, siehe beispielsweise [Eich92, S. 32]. Damit ist aber auch ein Schlüssel verfügbar, periodische Lösungen $\mathbf{y}_p = (\mathbf{p}_p^T, \mathbf{v}_p^T, \boldsymbol{\lambda}_p^T)^T$ der MKS–Gleichungen (5.1) direkt zu berechnen und bezüglich Stabilität zu analysieren. Weitere, auf dieser Interpretation aufbauende wichtige Werkzeuge sind dabei die in Abschnitt 5.3.1 vorgestellte lokale Parametrisierung einer Zwangsmannigfaltigkeit sowie die daraus abgeleitete lokale Zustandsform. Das Ergebnis lässt sich in der folgenden Argumentationskette zusammenfassen: Repräsentiert $\mathbf{z}_p(t) = (\mathbf{p}_{u,p}^T(t), \mathbf{v}_{u,p}^T(t))^T$ eine periodische Lösung einer Zustandsform (5.17) des DAGL–Systems (5.1), folgt auf der Basis der erweiterten inversen Abbildung (5.18), $\mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z})$, mit $\mathbf{p}_{a,p}(t) = \mathbf{p}_{a,p}(\mathbf{z}_p(t))$, $\mathbf{v}_{a,p}(t) = \mathbf{v}_{a,p}(\mathbf{z}_p(t))$ und $\boldsymbol{\lambda}_p(t) = \boldsymbol{\lambda}_p(\mathbf{z}_p(t))$, dass auch $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{y}_p(\mathbf{z}_p(t))$ eine periodische Lösung des zugrunde liegenden DAGL–Systems ist. Da nun aber weiter die Stabilität einer Lösung eine Systemeigenschaft darstellt, muss diese Qualität unabhängig von der gewählten Formulierung der Bewegungsgleichungen sein. Das bedeutet, dass von einer (in)stabilen Lösung der Zustandsform auf eine ebenfalls (in)stabile Lösung der Deskriptorform geschlossen werden kann – und umgekehrt. Ausführlicher wird diese Problematik in [Franke98] diskutiert, hier sollen nur die wichtigsten Grundgedanken aufgezeigt und speziell auf das in Abschnitt 4.3 vorgestellte Verfahren angewandt werden.

5.5.1 Vorbemerkungen: Die Poincaré–Abbildung auf einer Zwangsmannigfaltigkeit

Ausgangspunkt seien die Bewegungsgleichungen eines MKS in der Index–3–Form (5.1a)–(5.1c) mit konsistenten Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0)$. Da die algebraischen Nebenbedingungen eine Zwangsmannigfaltigkeit $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n_x}$ mit

$$\mathcal{M} := \{(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{v} = \mathbf{0}\} \quad (5.39)$$

gemäß (5.6) definieren, muss der Fluss $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ mit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ als Lösung dieses Anfangswertproblems für alle Zeiten t die Eigenschaft $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{M}$ erfüllen. Der Fluss $\boldsymbol{\varphi}$ kann folglich auch als eine Abbildung

$$\boldsymbol{\varphi} : [0, \infty) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0) := \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n_x} \quad (5.40)$$

betrachtet werden. Wichtig bei dieser Darstellung ist, dass hier und in den anschließenden Herleitungen aus Gründen der Einfachheit formal nur der Zustandsraum \mathbb{R}^{n_x} und damit der Zustandsvektor \mathbf{x} betrachtet werden. Dadurch bleiben zwar die verallgemeinerten Zwangskräfte bei der Bestimmung der Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} unberücksichtigt (diese können nach (5.4) aus \mathbf{x} berechnet werden), andererseits kann dann, wie in Abschnitt 5.3.1 beschrieben, der Fluss $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0)$ vermöge einer Parametrisierung dieser Mannigfaltigkeit auf eine (lokale) Zustandsform transformiert werden.

Grundidee der hier entwickelten Verfahren ist die Definition einer Poincaré–Abbildung *auf der Zwangsmannigfaltigkeit* \mathcal{M} nach (5.39), skizziert in Abb. 5.3. Wie in Abschnitt 4.2 sei auch hier wieder eine Poincaré–Ebene $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n_x}$ eine $(n_x - 1)$ –dimensionale Hyperebene im Zustandsraum \mathbb{R}^{n_x} transversal zum Fluss $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s})$ des DAGL–Systems (5.1). Da nun aber dieser Fluss an die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gebunden ist, wird [Franke98] folgend jetzt eine Poincaré–Abbildung als die zeitdiskrete Abbildung

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) : \Sigma \cap \mathcal{M} \longrightarrow \Sigma \cap \mathcal{M} \quad \text{mit} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{w} := \mathbf{P}(\mathbf{s}) := \boldsymbol{\varphi}(T_R(\mathbf{s}), \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} := \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{s}, \mathbf{w} \in \Sigma \cap \mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{s}) \in \mathcal{M}$$

definiert, wobei der Fluss in den Punkten \mathbf{s} und \mathbf{w} bezüglich Σ die gleiche Orientierung haben muss. Der Wertebereich dieser Abbildung ist also die Schnittmenge $\Sigma \cap \mathcal{M}$, eine $(2n_f - 1)$ –dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M} . Eine periodische Lösung stellt sich wiederum als Fixpunkt einer solchen Abbildung dar, $\mathbf{P}(\mathbf{s}_p) = \mathbf{s}_p$.

In Analogie zu dem Randwertproblem (4.3) für GDGL–Systeme kann unter dieser Voraussetzung eine periodische Lösung $\mathbf{y}_p(t)$ des DAGL–Systems (5.1) mit $\mathbf{y}_p(t + T_P) = \mathbf{y}_p(t)$ aus dem erweiterten Randwertproblem

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (5.42a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.42b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) \quad (5.42c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{y}(T_P, \mathbf{y}(0)) - \mathbf{y}(0) \quad (5.42d)$$

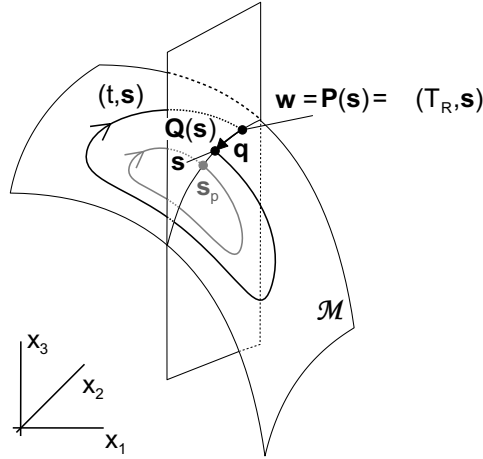


Abbildung 5.3: Poincaré–Abbildung $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ und Residuen–Abbildung $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$ eines konsistenten Anfangspunktes \mathbf{s} des DAGL–Systems (5.1a)–(5.1c). Im Unterschied zu Abb. 4.1 ist der Fluss $\varphi(t, \mathbf{s})$ des Systems an die Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} gebunden. Der Fixpunkt \mathbf{s}_p der Abbildung repräsentiert eine periodische Lösung; Σ ist die Poincaré–Ebene.

ermittelt werden. Aufgrund der algebraischen Nebenbedingungen (5.42c) und deren zeitlichen Ableitungen (5.1d), (5.1e) können die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Verfahren jedoch nicht direkt zur Lösung dieses RWP zur Anwendung gelangen. Bevor die erforderlichen Modifikationen vorgestellt und diskutiert werden, soll zunächst noch die Stabilität periodischer Lösungen \mathbf{y}_p von DAGL–Systemen untersucht werden.

5.5.2 Stabilitätsanalyse periodischer Lösungen: Reduzierte Monodromiematrix und reduzierte Poincaré–Abbildung

Wie in Abschnitt 3.2.3 bereits angeführt, kann die Stabilität einer periodischen Lösung mittels der Eigenwerte der Monodromiematrix $\mathbf{M} := \partial \varphi(T_P, \mathbf{s}_p) / \partial \mathbf{s}$, also im Prinzip aus einer Störung der Anfangswerte \mathbf{s}_p beurteilt werden. Der Grundgedanke für DAGL–Systeme ist nun, dass es ob der Bindung des Flusses an die Zwangsmannigfaltigkeit völlig ausreichend ist, allein mit ebendieser Mannigfaltigkeit konforme Störungen zu betrachten, [Franke98]. Dies wiederum führt auf die (lokale) Parametrisierung der Zwangsmannigfaltigkeit bezüglich $(\mathbf{x}_c :=) \mathbf{s}_p = \mathbf{x}_{p,0}$, dem Startpunkt einer periodischen Trajektorie, die auch die Basis für die in Abschnitt 5.3.1 beschriebene Transformation auf eine (lokale) Zustandsform bildet. Unter Berücksichtigung der inversen Abbildung (5.16) $\phi_{\mathbf{x}_{p,0}} : U_2 \subset \mathbb{R}^{2n_f} \rightarrow U_1(\mathbf{x}_{p,0}) \subset \mathbb{R}^{n_x}$ sowie der Abbildung (5.40) wird die *reduzierte* Abbildung (vgl. (5.15a))

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathbf{z}_0) &:= \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \left(\varphi(T_R, \phi(\mathbf{z}_0)) - \mathbf{x}_{p,0} \right), \\ \mathbf{z}_0 \in U_2(\mathbf{0}), \quad \varphi(t, \phi(\mathbf{z}_0)) &\in \mathcal{M}, \quad \varphi(T_R, \phi(\mathbf{z}_0)) \in U_1 \subset \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{5.43}$$

nach Ablauf der Rückkehrzeit T_R bzw. der Periode T_P betrachtet. Eine periodische Lösung ist dann durch den Fixpunkt $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ charakterisiert:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot (\varphi(T_P, \mathbf{x}_{p,0}) - \mathbf{x}_{p,0}) = \mathbf{0} .$$

Differentiation nach den Anfangswerten \mathbf{z}_0 und Auswertung für den Fixpunkt führt auf

$$\tilde{\mathbf{M}} := \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} \right|_{\mathbf{z}_0=\mathbf{0}} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \left. \frac{\partial \varphi(T_P, \phi(\mathbf{z}_0))}{\partial \mathbf{z}_0} \right|_{\mathbf{z}_0=\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{2n_f \times 2n_f} , \quad (5.44)$$

die *reduzierte Monodromiematrix* der periodischen Lösung $\mathbf{y}_p = (\mathbf{p}_p^T, \mathbf{v}_p^T, \boldsymbol{\lambda}_p^T)^T$ des Index–3–Systems (5.42a)–(5.42c). Deren Eigenwerte $\mu_i, i=1, \dots, 2n_f$ stellen die gesuchten Floquet–Multiplikatoren dar und erlauben die Stabilitätsbeurteilung der Lösung \mathbf{y}_p . Auch in diesem Fall gilt wieder, dass stets einer der Multiplikatoren $\mu = 1.0$ erfüllen muss (vgl. Testfunktion (4.25)), der zugehörige Eigenvektor ist $\tilde{\mathbf{V}}^T \dot{\mathbf{x}}_{p,0}$. Zur Beurteilung der Stabilität anhand der übrigen Eigenwerte gelten die in Abschnitt 3.2.3 angeführten Regeln.

Neben der kontinuierlichen Betrachtungsweise kann die Stabilität einer periodischen Lösung nach Abschnitt 4.2 aber auch durch Betrachtung des Fixpunktes einer zugehörigen diskreten Poincaré–Abbildung bestimmt werden, und zwar mittels der Eigenwerte der Jacobimatrix $\partial \mathbf{P}(\mathbf{s}_p)/\partial \mathbf{s}$ dieser Abbildung. Um die Bindung der Poincaré–Abbildung (5.41) an die Zwangsmannigfaltigkeit explizit zu berücksichtigen (vgl. Abb. 5.3), wird analog zur Bestimmung einer reduzierten Abbildung $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}_0)$ in (5.43) ausgehend von der Poincaré–Abbildung (5.41) eine *reduzierte, $(2n_f - 1)$ –dimensionale Poincaré–Abbildung*

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{z}_0) := \tilde{\mathbf{V}}^T \left(\mathbf{P}(\phi(\mathbf{z}_0)) - \mathbf{x}_{p,0} \right) \quad (5.45)$$

definiert. Wie in [Franke98] nachgewiesen wird, stimmen die Eigenwerte von deren Jacobimatrix bezüglich \mathbf{z}_0 für den Fixpunkt ($\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$) mit den Eigenwerten der Monodromiematrix (5.44) überein – abgesehen natürlich von dem überzähligen 1.0–Eigenwert.

Die reduzierten Abbildungen $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\mathbf{P}}$ gelten allgemein für die in Abschnitt 5.3.1 mittels der Transformation (5.15) definierten lokalen Parametrisierungen, also unter den dort gegebenen Voraussetzungen für allgemeine Zustandsformen. Wird nun konkret eine mit der Zustandsform ③ einhergehende Parametrisierung angewandt, ergeben sich gewisse Vereinfachungen. Charakterisiert ist ③ durch eine konstante Parametrisierungsmatrix $\tilde{\mathbf{V}}$ entsprechend den Bewegungsgleichungen in Minimalform (5.24) sowie einen unveränderlichen Bezugspunkt $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$. Man erhält für die reduzierten Abbildungen (5.43) bzw. (5.45) mit der Transformation (5.25)

$$\tilde{\varphi}_3(\mathbf{z}_0) := \tilde{\mathbf{V}}^T \varphi(T_R, \phi(\mathbf{z}_0)) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{P}}_3(\mathbf{z}_0) := \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{P}(\phi(\mathbf{z}_0)) ; \quad (5.46)$$

für einen Fixpunkt $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_{p,0}$ verbleibt damit die Monodromiematrix (5.44) zu

$$\tilde{\mathbf{M}}_3 := \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \left. \frac{\partial \varphi(T_P, \phi(\mathbf{z}_0))}{\partial \mathbf{z}_0} \right|_{\mathbf{z}_0=\mathbf{z}_{p,0}} . \quad (5.47)$$

5.5.3 Bestimmung periodischer Lösungen: Die Methode der Poincaré–Abbildung mit Variationsdifferentialgleichungen

Im Gegensatz zu Anfangswertproblemen von DAGL–Systemen, zu deren Lösung eine breite Palette unterschiedlicher Verfahren in Form wohlgetesteter Software zur Verfügung stehen, existieren zur Bearbeitung von Randwertproblemen von DAGL–Systemen (5.42) nur relativ wenige frei zugängliche Implementierungen entsprechend problemangepasster Methoden. Ein Universalcode ist in dem Programm COLDAE implementiert, [AscherSpiteri94], mit dem Randwertprobleme semi–expliziter DAGL–Systeme von maximalem Index 2 gelöst werden können. Zum Einsatz kommt dabei ein projiziertes Kollokationsverfahren (vgl. Abschnitt 4.1.2), das durch die Projektion der inneren Gitterpunkte auf die Zwangsmannigfaltigkeit die Einhaltung der Zwangsbedingungen an den Gitterpunkten bewirkt. Zur Anwendung auf das MKS–RWP (5.42) müsste demnach zunächst dessen Index reduziert werden, die resultierende Überbestimmtheit könnte dann beispielsweise durch Übergang auf die GGL–Form (5.7) vermieden werden.

Zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen von MKS, deren Bewegungsgleichungen als DAGL–System vom Index 2 formuliert sind, wird in [Franke98] ein erweitertes projiziertes Kollokationsverfahren beschrieben. Die Erweiterung besteht in der zusätzlichen Projektion am linken Rand des RWP auf die Index–3 Mannigfaltigkeit durch Einhaltung der Zwangsbedingungen für $t=0$. Die daraus folgende Überbestimmtheit des Kollokationssystems wird durch die Einführung von $2n_\lambda$ Hilfsvariablen vermieden. Der erweiterte Typus des voll impliziten Index–1 und –2 DAGL–Systems eines Anfangs– oder Randwertproblems wird in [Lamour97] betrachtet. Zur Lösung wird dort ein spezielles Mehrschießverfahren eingesetzt, besondere Beachtung findet dabei die Sicherstellung konsistenter Anfangswerte in den Gitterpunkten.

Im Folgenden soll die in Kapitel 4.2 vorgestellte und in 4.3 um eine integrierte Sensitivitätsanalyse erweiterte Methode der Poincaré–Abbildung im Hinblick auf die Bearbeitung von erweiterten Randwertproblemen des Typs (5.42) modifiziert werden. Im Gegensatz zu den oben angeführten Programmrealisierungen, die alle auf dem erweiterten Zustandsvektor $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$ aufbauen, ist dabei die Transformation auf eine Zustandsform (speziell die Zustandsform ③) gemäß Abschnitt 5.3 das zentrale Werkzeug, also die geeignete Parametrisierung der Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} nach (5.39). Wie in Abb. 5.2 auf S. 100 bereits angedeutet, wird das RWP–Lösungsverfahren also direkt und ausschließlich auf den Vektor \mathbf{z} der Minimalkoordinaten angewandt. Die inhärente Bestimmung konsistenter Anfangsbedingungen vor jedem neuen Integrationslauf kann dabei auch als Projektion auf die Zwangsmannigfaltigkeit interpretiert werden.

Zur Berechnung periodischer Lösungen \mathbf{y}_p von DAGL–Systemen (5.1) mit Hilfe der Methode der Poincaré–Abbildung stellt das Konzept der reduzierten Poincaré–Abbildung (5.45)/(5.46) eine geeignete Basis dar. Ausgehend von der Zustandsform ③ (die Herleitung lässt sich einfach auf allgemeinere Zustandsformen entsprechend Abschnitt 5.3.1 erweitern) wird, wie in Abb. 5.3 dargestellt, in Abwandlung von (4.10) eine *reduzierte Residuenabbildung* $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}_0) : \Sigma \cap \mathcal{M} \longrightarrow \Sigma \cap \mathcal{M}$, $\dim(\tilde{\mathbf{Q}}) = 2n_f - 1$, mit

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}_0) := \tilde{\mathbf{P}}_3(\mathbf{z}_0) - \mathbf{z}_0 = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{P}(\phi_e(\mathbf{z}_0)) - \mathbf{z}_0 = \tilde{\mathbf{V}}^T \boldsymbol{\varphi}(T_R, \phi_e(\mathbf{z}_0)) - \mathbf{z}_0$$

definiert, deren Nullstelle

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}_{p,0}) = \mathbf{0} \quad (5.48)$$

entsprechend Gleichung (4.11) einen Anfangspunkt $\mathbf{z}_{p,0}$ der periodischen Trajektorie $\mathbf{z}_p(t, \mathbf{z}_{p,0})$ in Minimalkoordinaten festlegt. Unter Anwendung der erweiterten inversen Abbildung (5.18) erhält man daraus einen konsistenten Deskriptorvektor als Anfangsbedingung einer periodischen Lösung des DAGL-Systems (5.1), $\mathbf{y}_{p,0} = \phi_e(\mathbf{z}_{p,0})$. Die reduzierte Residuenabbildung entspricht der Minimalform des Residuums im Prinzipschaubild 5.2, $\mathbf{Q}^z := \tilde{\mathbf{Q}}$.

Die Lösung des NLGS (5.48) und damit des Randwertproblems (5.42) baut auf dem in Abschnitt 4.3.2 beschriebenen Ansatz der Kombination der Newton-Iteration mit einer integrierten Sensitivitätsanalyse auf. Aus (5.48) folgt die zu (4.17) analoge Aufgabe, das System von $n_z = 2n_f$ nichtlinearen Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}_{p,0}) := \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \varphi\left(T_R(\phi_e(\mathbf{z}_{p,0})), \phi_e(\mathbf{z}_{p,0})\right) - \mathbf{z}_{p,0} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{z}_{p,0} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (5.49)$$

nach einer Nullstelle $\mathbf{z}_{p,0}$ iterativ aufzulösen. Bei der Auswertung dieser Gleichung ist zu beachten, dass der Fluss $\varphi(T_R(\phi_e(\mathbf{z}_0)), \phi_e(\mathbf{z}_0))$ jeweils durch Integration im erweiterten Zustandsraum \mathbb{R}^{n_y} auf der Grundlage der GGL-Formulierung (5.7) bestimmt wird. Die dazu erforderliche Berechnung konsistenter Anfangsbedingungen $\mathbf{y}_0 = \phi_e(\mathbf{z}_0)$ ist dabei gleichbedeutend mit der erweiterten inversen Abbildung (5.18) und entspricht dem Schritt **A** im Prinzipschaubild 5.2 auf S. 100. Daneben soll auch hier wieder die Projektion in die Poincaré-Ebene erst am Ende der Herleitungen durchgeführt werden, natürlich ist aber die gesamte Iteration an die Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} gebunden. Zur Verdeutlichung der Minimalkoordinaten und der Zustandsform **3** wird im Unterschied zu Abschnitt 4.3.2 die gesuchte Lösung stets mit \mathbf{z}_0 (statt \mathbf{s} und meist als Abkürzung von $\mathbf{z}_{p,0}$) bezeichnet.

Die Lösung des Gleichungssystems (5.49) erfolgt also mit einer Newton-Iteration (4.18), wobei wiederum die Iterationsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{z}_0}$ auf der Basis einer geeigneten Sensitivitätsanalyse berechnet wird. Hierzu wird zunächst wieder die Abbildung $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}_0)$ nach den Anfangswerten \mathbf{z}_0 differenziert, dann werden die einzelnen Terme näher analysiert (man vergleiche mit der Iterationsmatrix (4.21)):

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{z}_0} := \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}(\phi_e(\mathbf{z}_0))}{\partial \mathbf{z}_0} = \underbrace{\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \frac{\partial \varphi(T_R, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0}}_{\frac{\partial \tilde{\varphi}_3}{\partial \mathbf{z}_0} =: \tilde{\mathbf{S}}(T_R, \mathbf{z}_0)} + \underbrace{\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \frac{\partial \varphi(T_R, \mathbf{z}_0)}{\partial T_R}}_{\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}(T_R, \mathbf{z}_0)} \cdot \frac{\partial T_R}{\partial \mathbf{z}_0} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial \mathbf{z}_0}}_{\mathbf{I}^{n_z \times n_z}}. \quad (5.50)$$

Dabei müsste wegen der Abbildung $\mathbf{y} = \phi_e(\mathbf{z})$ im Grunde die Kettenregel $\partial(\cdot)/\partial \mathbf{z}_0 = \partial(\cdot)/\partial \phi_e \cdot \partial(\phi_e)/\partial \mathbf{z}_0$ Beachtung finden. Dieser Term tritt hier und im Folgenden jedoch stets als Einheit auf und soll deswegen durch die kompakte Darstellung $\partial(\cdot)/\partial \mathbf{z}_0$ charakterisiert werden.

Zur Bestimmung der reduzierten, $(n_z \times n_z)$ -dimensionalen Sensitivitätsmatrix $\tilde{\mathbf{S}}(T_R, \mathbf{z}_0)$ wird zunächst die Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(T_R, \mathbf{z}_0)$ durch Integration der entsprechenden linearen VDGL berechnet. Vergleichbar den VDGL (4.24) können diese aus den Bewegungs-

gleichungen in impliziter Form (5.2)

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{y}}(t, \phi_e(\mathbf{z}_0)), \mathbf{y}(t, \phi_e(\mathbf{z}_0)), t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (5.51)$$

durch partielle Differentiation $\partial/\partial\mathbf{z}_0$ abgeleitet werden,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{z}_0}}_{=: \dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}_0}}_{=: \mathbf{S}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{S}_0, \quad \dim(\mathbf{S}) = n_y \times n_z. \quad (5.52)$$

Im Gegensatz zu den VDGL (4.24) von GDGL-Systemen sind dabei konsistente Anfangsbedingungen für $t=0$ vonnöten,

$$\mathbf{S}_0 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}_{u,0}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T; \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{a,0}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T; \left(\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_0}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T \right)^T, \quad \frac{\partial \mathbf{x}_{u,0}}{\partial \mathbf{z}_0} = \mathbf{I},$$

die aus der Forderung nach Erfüllung der VDGL ($\partial/\partial\mathbf{z}_0$) der Zwangsbedingungen (5.1c)–(5.1e) gewonnen werden können. Auf die Berechnung dieser Anfangssensitivitäten wird in Abschnitt 6.2.2 näher eingegangen, die algorithmusgerechte Aufbereitung der Sub-Jacobimatrix $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{y}$ ist in Abschnitt 6.2.1 beschrieben. Die Lösung der VDGL (5.52) erfolgt durch den in Abschnitt 4.3.4 beschriebenen DAGSL-Algorithmus synchron mit dem zugehörigen Nominalsystem in der GGL-Formulierung (5.7). Aufbauend auf dem BDF-Code DASSL erlaubt DAGSL auch die Lösung der VDGL von Deskriptorgleichungen (5.1). Angemerkt sei noch, dass zur Auswertung der Iterationsmatrix (5.50) die Sensitivitäten nur bezüglich des reduzierten Satzes der Minimalkoordinaten \mathbf{z}_0 erforderlich sind.

Vor der Weiterverarbeitung der Sensitivitäten werden diese in einen differentiellen Anteil \mathbf{S}^x und einen algebraischen Anteil \mathbf{S}^λ zerlegt,

$$\mathbf{S} := \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}_0} = \left(\begin{array}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}_0} \right) \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{z}_0} \right) \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_z} \\ \mathbf{S}^\lambda \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times n_z} \end{array} \right. .$$

Mit $\boldsymbol{\varphi}(T_R, \mathbf{z}_0) := \mathbf{x}(T_R, \mathbf{z}_0)$ gemäß (5.40) bleibt dann nach Integration der VDGL (5.52) bis $t = T_R$ nach der Transformation auf die Zustandsform ③ (Minimalkoordinaten) die in (5.50) gesuchte reduzierte Sensitivitätsmatrix

$$\tilde{\mathbf{S}}(T_R, \phi_e(\mathbf{z}_0)) = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{S}^x(T_R, \phi_e(\mathbf{z}_0)) \left(= \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_3(T_R, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} = \frac{\partial \mathbf{z}(T_R, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} \right). \quad (5.53)$$

Hat die Iteration des Gleichungssystems (5.49) gegen eine periodische Lösung $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_{p,0}$ konvergiert, kann nach Abschnitt 5.5.2 mittels der Eigenwerte der reduzierten Monodromiematrix (5.44) bzw. (5.47),

$$\widetilde{\mathbf{M}}_3 \equiv \tilde{\mathbf{S}}(T_P, \mathbf{z}_{p,0}), \quad \dim(\widetilde{\mathbf{M}}_3) = n_z \times n_z, \quad (5.54)$$

die Stabilität der periodischen Lösung \mathbf{y}_p des Index–3–Systems (5.1) vollständig bestimmt werden. Auch hier müssen wieder die n_z Floquet–Multiplikatoren die Testfunktion (4.25) für einen 1.0–Eigenwert $\mu_k \in \mathbb{C}$, $k \in [1, \dots, n_z]$ als Qualitätsmerkmal erfüllen. Auf der Basis dieser Stabilitätsanalyse sind dann nach Abschnitt 3.2.4 Verzweigungspunkte detektierbar und identifizierbar.

Die partielle Differentiation des Flusses nach der Rückkehrzeit T_R führt wie bereits in (4.26) auf den Geschwindigkeitsvektor, reduziert auf die Minimalkoordinaten,

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \frac{\partial \varphi(T_R, \phi_e(\mathbf{z}_0))}{\partial T_R} = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}(T_R, \phi_e(\mathbf{z}_0)) = \dot{\mathbf{z}}(T_R, \mathbf{z}_0) .$$

Zur Generierung des Terms $\partial T_R / \partial \mathbf{z}_0$ wird auf die Orthogonalitätsbedingung (4.27) zur Definition einer Poincaré–Ebene zurückgegriffen, allerdings angepasst an die in (5.41) definierte, an die Zwangsmannigfaltigkeit \mathcal{M} gebundene Poincaré–Abbildung. Betrachtet wird jetzt also gemäß Abb. 5.3 die Schnittebene $\Sigma \cap \mathcal{M}$, definiert durch einen Punkt $\mathbf{z}_\Sigma \in \Sigma \cap \mathcal{M}$ und den Normalenvektor $\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma$. Eine Trajektorie $\varphi(t, \phi_e(\mathbf{z}_0))$ schneidet zum Zeitpunkt $t = T_R$ genau dann $\Sigma \cap \mathcal{M}$, wenn die Orthogonalitätsbedingung

$$(\mathbf{z}(T_R, \mathbf{z}_0) - \mathbf{z}_\Sigma)^T \cdot \tilde{\mathbf{n}}_\Sigma = 0$$

erfüllt ist. Als Punkt \mathbf{z}_Σ wird geeigneterweise wieder der im Rahmen der Pfadverfolgung im vorangehenden Verfolgungsschritt $j - 1$ gefundene Startpunkt einer periodischen Lösung verwendet, $\mathbf{z}_\Sigma^j := \mathbf{z}_{p,0}^{j-1} \in \Sigma \cap \mathcal{M}$, den zugehörigen Normalenvektor erhält man als Tangente an \mathcal{M} in \mathbf{z}_Σ ($\dim(\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma) = n_z$),

$$\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma := \dot{\mathbf{z}}(0, \mathbf{z}_\Sigma) = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}(0, \phi_e(\mathbf{z}_\Sigma)) = \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}(0, \phi_e(\mathbf{z}_\Sigma)) \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_e(0, \phi_e(\mathbf{z}_\Sigma)) - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_0(0, \phi_e(\mathbf{z}_\Sigma))) \end{pmatrix} .$$

Mit dem Skalarprodukt $\mathbf{z}_\Sigma^T \cdot \tilde{\mathbf{n}}_\Sigma = \text{konst.}$ ($\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma$ sei über $\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma / \|\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma\|$ normiert) folgt unter Anwendung der gleichen Schritte, die auf $\partial T_R / \partial \mathbf{s}$ nach (4.28) führen, der gesuchte Term:

$$\frac{\partial T_R}{\partial \mathbf{z}_0} = - \underbrace{\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma^T}_{(1 \times n_z)} \cdot \underbrace{\tilde{\mathbf{S}}(T_R, \mathbf{z}_0)}_{(n_z \times n_z)} \cdot \underbrace{(\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma^T \cdot \dot{\mathbf{z}}(T_R, \mathbf{z}_0))^{-1}}_{(1 \times 1)} .$$

Damit ist die Iterationsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{z}_0}$ aus (5.50) vollständig bestimmt und das Gleichungssystem (5.49) kann hin zu einer periodischen Lösung $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_{p,0}$ iteriert werden. Um die Iteration auf die $(n_z - 1)$ –dimensionale Schnittebene $\Sigma \cap \mathcal{M}$ zu beschränken, ist das in Abschnitt 4.2 vorgestellte Schema an Projektionen in diese Schnittebene durchzuführen, daneben ist auch noch $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{z}_0}$ entsprechend (4.29) orthogonal zu projizieren. Die dazu erforderliche $(n_z \times (n_z - 1))$ –Projektionsmatrix $\mathbf{B}_{\Sigma \cap \mathcal{M}}$ folgt aus einer zu $\tilde{\mathbf{n}}_\Sigma$ orthogonalen, orthonormierten Basis $\mathcal{B}_{\Sigma \cap \mathcal{M}}$ auf die dort ebenfalls bereits dargestellte Art und Weise.

Bei Einbettung in einen Fortsetzungsalgorithmus ist ein innerhalb der Korrekturiteration (4.18) zur Lösung des Gleichungssystems (5.49) unveränderlicher Systemparameter p der einfachste Ansatz. Vorzuziehen ist jedoch die in Abschnitt 4.3.5 behandelte Beschränkung

der Iterationsrichtung $(\Delta \mathbf{z}_{p,0}^T, \Delta p)^T$ auf eine Hyperebene orthogonal zur Tangente an den Pfad. Die Vorgehensweise ist dort ausführlich vorgestellt und kann leicht direkt auf die hier behandelte Zustandsformulierung von DAGL–Systemen angewendet werden.

Wie gezeigt, ist mit einer (lokalen) Zustandsform (5.17), und hierbei insbesondere mit der Zustandsform ③, eine geeignete Formulierung der Bewegungsgleichungen (5.1) von MKS mit kinematischen Schleifen als Grundlage für deren Verzweigungsanalyse gegeben. Allerdings soll nicht verschwiegen werden, dass die dazu wiederholt durchzuführende, erweiterte inverse Abbildung $\phi_e : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{y}$ die interne Iteration von insgesamt $3n_\lambda$ impliziten nichtlinearen Gleichungen bedeutet, die aus den Zwangsbedingungen (5.1c)–(5.1e) hervorgehen. Im stationären Fall lässt sich dieser Aufwand auf Kosten der Systemdimension zumindest bei der Korrekturiteration vermeiden. Bei der Bestimmung periodischer Lösungen wird die Rechenzeit jedoch eindeutig von der kombinierten Integration des nominellen und des Sensitivitätssystems dominiert – die Auswertungen von ϕ_e , beispielsweise zur Bestimmung konsistenter Anfangsbedingungen, fallen dabei kaum ins Gewicht.

Die vorgestellten Erweiterungen der Methode der Poincaré–Abbildung, also im Wesentlichen die Kombination mit den Variationsdifferentialgleichungen bei auf Minimalform reduzierten Bewegungsgleichungen, lassen sich auch auf andere Anfangswert– bzw. Schießverfahren zur Lösung des allgemeinen erweiterten Randwertproblems (5.42) übertragen. Bei Anwendung auf Mehrfachschießverfahren sind dann natürlich in jedem Gitterpunkt konsistente Anfangswerte bereitzustellen, was bei Verwendung engmaschiger Gitter zu einem verhältnismäßig starken Anstieg der Rechenzeit führen kann, [Lamour97].

Zum Abschluss des Kapitels sei nochmals darauf hingewiesen, dass das Konzept der *reduzierten Poincaré–Abbildung* (5.45) eine erhebliche Reduktion des Gesamtrechenaufwandes ermöglicht. Durch die Transformation auf eine Zustands– oder Minimalform zur Berechnung periodischer Lösungen \mathbf{y}_p des DAGL–Systems (5.1) besteht das zu lösende nichtlineare Gleichungssystem (5.48) nur noch aus $n_z = 2n_f = 2(n_p - n_\lambda)$ (anstatt $n_y = 2n_p + n_\lambda$) Gleichungen. Die wesentliche Einsparung geht dabei aus der Generierung der Sensitivitäten bezüglich des Anfangszustandes hervor: Sowohl zur Korrekturiteration von (5.48) als auch zur Stabilitätsanalyse müssen lediglich die $n_y n_z$ Sensitivitäten $\mathbf{S} = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{z}_0$ (anstatt der n_y^2 Sensitivitäten $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{y}_0$) integriert werden.

Im anschließenden Kapitel sollen die vorgestellten und entwickelten Verfahren zur Verzweigungsanalyse stationärer und periodischer Lösungen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen *mit und ohne* kinematische Schleifen in einem Gesamtkonzept zur Implementierung integriert werden. Daneben werden einzelne Aspekte zur Umsetzung in Programmcode, zur Numerik sowie zu besonderen Anforderungen an die Fahrzeugmodellierung besonders hervorgehoben. Anhand kleinerer Testbeispiele werden dann die Verfahren sowie deren computergerechte Umsetzung näher untersucht und teilweise verifiziert.

Kapitel 6

Ausgewählte Aspekte einer Implementierung

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, eine Software-Umgebung zu schaffen, die es erlaubt, die mittels eines MKS-Programms erstellten Bewegungsgleichungen mechanisch-technischer Systeme direkt einer Verzweigungsanalyse zugänglich zu machen. Hierzu sind die bisher entwickelten Algorithmen in Programmcode umzusetzen sowie gemeinsam mit den bereits existenten Software-Paketen SIMPACK, PATH und DAGSL in einem Gesamtkonzept zu integrieren. Ein solches Gesamtkonzept wird unter Beachtung eines modularen Aufbaus vorgestellt.

Eines der wesentlichen Merkmale von DAGL-Systemen ist die geforderte Konsistenz der Anfangsbedingungen zur Integration. Entsprechende Konsistenzforderungen sind folglich auch bei der Festlegung der Anfangssensitivitäten der VDGL und der Sensitivitätsgleichungen zu erfüllen. Es werden zwei Herangehensweisen an diese Problematik diskutiert.

Besondere Beachtung bei der direkten Berechnung stationärer wie auch periodischer Lösungen der Bewegungsgleichungen von Schienen- und Straßenfahrzeugen erfordern deren große Bewegungen, die im Allgemeinen weder stationär noch periodisch sind: Die Fahrt entlang der Trasse sowie die Eigendrehung der Räder/Radsätze. Die Handhabung solcher Bewegungen bereits auf Modellierungsebene wird unter dem Stichwort Modellierungsaspekte behandelt.

Der letzte Abschnitt des Kapitels ist dann ersten Anwendungen auf kleinere dynamische Systeme gewidmet. Der Vergleich mit analytischen Ergebnissen oder entsprechenden Untersuchungen aus der Literatur erlaubt eine zumindest partielle Verifikation der Algorithmen selbst sowie deren Umsetzung in Programmcode.

6.1 Gesamtkonzept einer Implementierung

Die in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten und beschriebenen Methoden sind im Rahmen eines modular aufgebauten, in Abb. 6.1 grob skizzierten Gesamtkonzepts einer Verzweigungsanalyse als zusätzliches Analyse-Werkzeug innerhalb eines Programm-

systems zur Simulation von Mehrkörpersystemen (SIMPACK) implementiert. Leitmotiv ist die Integration der notwendigen Programmbausteine hin zu einem effizienten und effizient anwendbaren Software-Werkzeug zur Verzweigungsanalyse komplexer technischer Systeme auf der Grundlage der Verzweigungssoftware PATH.

Aus der vom Anwender einzugebenden Modelldefinition generiert der MKS-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems, im allgemeinsten Fall als System impliziter differentieller und algebraischer Gleichungen $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, p, t) = \mathbf{0}$. Zu deren Untersuchung steht eine ganze Reihe angepasster unterschiedlicher numerischer Analysemethoden zur Verfügung, beispielhaft genannt seien die kinematische Analyse und die Zeitschrittintegration. An dieser Stelle ist die Verzweigungsanalyse als weitere Analysemethode eingefügt. Die Struktur eines Programms zur MKS-Simulation ist detaillierter bereits in Abschnitt 2.1.1 und insbesondere in Abb. 2.2 behandelt.

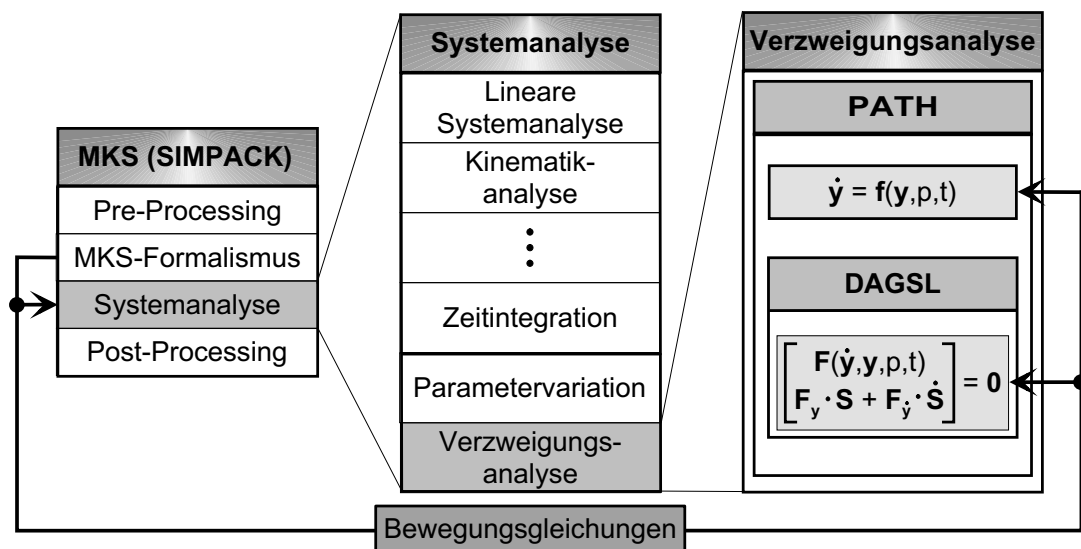


Abbildung 6.1: Gesamtkonzept einer Implementierung der Verzweigungsanalyse, bestehend aus den Grundbausteinen MKS (SIMPACK) – Verzweigungsanalyse (PATH) – Integration (DAGSL).

Abb. 6.1 deutet die enge Verkopplung von MKS-Software und Verzweigungsmodul als eine dreifache an. Erstens ist die Verzweigungsanalyse als zusätzliches Verfahren im umfassenden Rahmen der Systemanalyse integriert. Dadurch kann relativ einfach über geeignete Schnittstellen auf die gesamte Palette von im MKS-Programm verfügbaren Integrationsverfahren zurückgegriffen werden. Von besonderem Interesse ist hierbei der Integrator DASSL bzw. dessen Derivat DAGSL. Die einzelnen (Sub-)Module der Verzweigungsanalyse greifen zweitens auf die Bewegungsgleichungen in der jeweils geeigneten Formulierung zu. Und drittens kann ein bi-direktionaler Datenaustausch mit den anderen Analysemethoden via entsprechender Dateischnittstellen erfolgen. Damit ist aber auch die Konsistenz sowohl der Modellstruktur als auch der Modellparameter bei Anwendung unterschiedlicher, sich ergänzender Analysemethoden garantiert.

Die Verkettung der einzelnen Submodule in Abb. 6.2 spiegelt im Grunde auch den prinzipiellen Ablauf einer Verzweigungsanalyse wider. Zum Neustart einer Pfadverfolgung ist ein Anfangspunkt $(\mathbf{y}^0; p^0)$ vorzugeben, der als Anfangsschätzung der unmittelbar anschließenden Korrekturiteration dient und deshalb in ausreichender Nähe, d.h. im Einzugsbereich eines stationären bzw. periodischen Attraktors liegen muss. Mit dieser im Allgemeinen nicht näher quantifizierten Forderung ist bereits eine oftmals auftretende, wesentliche Hürde einer Verzweigungsanalyse benannt, insbesondere bei größerer Systemdimension. Hier bietet die enge Kopplung an die externe Zeitschrittintegration des MKS-Programms eine sehr einfach zu handhabende und effektive Abhilfe: Ausgehend von einem nahezu beliebigen Anfangszustand $\mathbf{y}(t_0)$ wird bei definiertem Parameterwert p bis zu einem Zeitpunkt $t = T_{\text{sim}}$ integriert, für den sich *näherungsweise* stationäres oder periodisches Systemverhalten einstellt. Über eine Dateischnittstelle kann der Endzustand der Integration gemeinsam mit dem aktuellen Parameterwert direkt als Startwert der Pfadverfolgung verwendet werden, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}(t = T_{\text{sim}})$, $p^0 = p$.

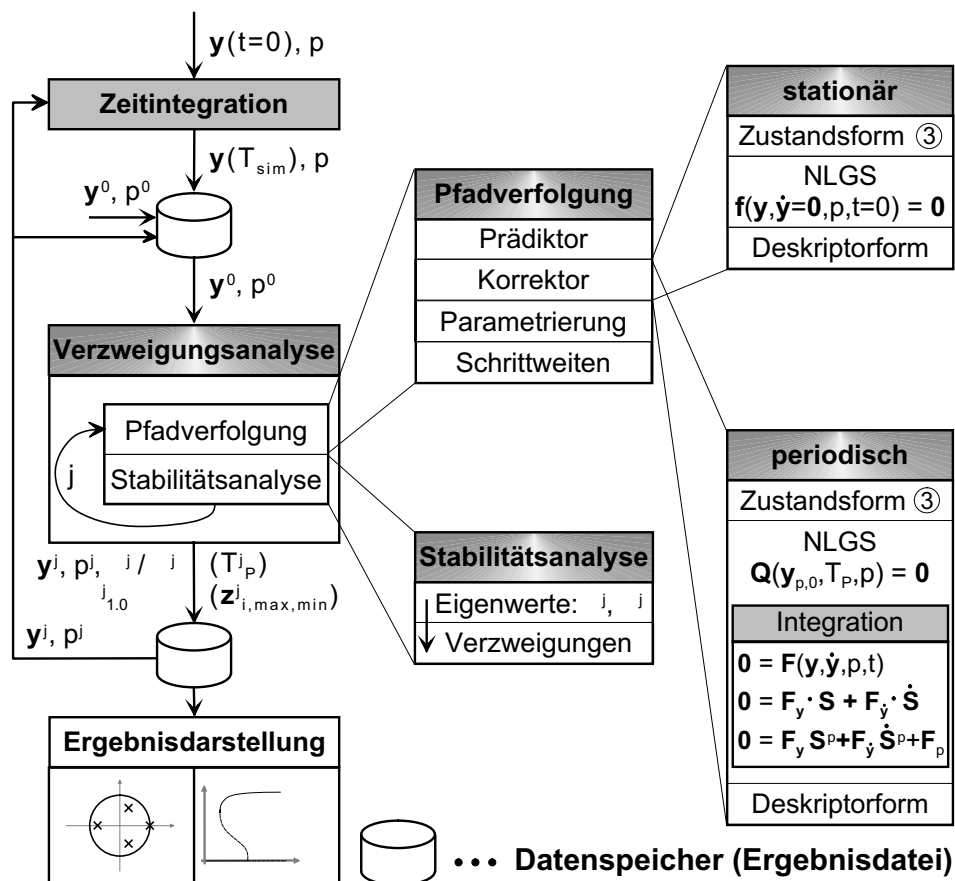


Abbildung 6.2: Modularer Aufbau der Verzweigungsanalyse bei Einbindung in das in Abb. 6.1 dargestellte Gesamtkonzept. Das Schema spiegelt gleichzeitig auch den prinzipiellen Ablauf einer solchen computergestützten Untersuchung wider.

Die eigentliche Verzweigungsanalyse kann in die beiden Hauptaufgaben Pfadverfolgung (Abschnitt 3.2.2) und Stabilitätsanalyse (Abschnitt 3.2.3) unterteilt werden. Diese sind

in einer einfachen übergeordneten sequentiellen Schleife $j = 1, \dots, Nstep$ organisiert, wodurch ein Lösungsast oder -pfad als Aneinanderreihung diskreter Lösungspunkte (\mathbf{y}^j, p^j) im Zustands-Parameter-Raum generiert wird, von denen jeder einzelne einen spezifischen Attraktor repräsentiert. Wird ein solcher Lösungspunkt über eine Dateischnittstelle als Anfangswert einer herkömmlichen MKS-Zeitintegration verwendet, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^j$, $p = p^j$, ergibt sich ohne jeglichen Übergangsbereich direkt die zugehörige rein stationäre/periodische Trajektorie – eine einfache Testmöglichkeit der Ergebnisse. Jeder Schleifendurchgang endet mit einer Stabilitätsanalyse der gefundenen Lösung, also der Berechnung der n_z Eigenwerte $\lambda_i^j \in \mathbb{C}$ der linearisierten Zustandsform (5.35) bzw. der n_z Eigenwerte $\mu_i^j \in \mathbb{C}$ der reduzierten Monodromiematrix (5.47) (Floquet-Multiplikatoren). Damit werden dann eventuelle Verzweigungspunkte wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben detektiert und bezüglich des Systemparameters p näher lokalisiert. Als Ergebnis eines Schleifendurchgangs werden jeweils der aktuelle Parameterwert p^j , ein Punkt der aktuellen Lösung $\mathbf{y}^j(t_0=0, p^j)$ sowie die Eigenwerte $\boldsymbol{\lambda}^j(p^j)$ bzw. $\boldsymbol{\mu}^j(p^j)$ auf Dateien gespeichert. Im Falle periodischer Lösungen werden diese Ergebnisdaten noch durch die Periode $T_P^j(p^j)$, die über eine Periode bestimmten Maximal-/Minimalwerte aller n_z Zustandskoordinaten, $\max_{t \in [0, T_P]} z_i^j(t)$, $\min_{t \in [0, T_P]} z_i^j(t)$, und die Näherung des 1.0-Eigenwerts $\mu_{1,0}^j$ (vgl. die Testfunktion (4.25)) ergänzt. Nach Abschluss einer Verzweigungsanalyse können dann auf der Grundlage dieser Ergebnisdateien zur Visualisierung die üblichen graphischen Darstellungen wie Verzweigungsdiagramme, Wurzelortskurven etc. mit Hilfe geeigneter Plotprogramme erstellt werden.

Die Pfadverfolgung lässt sich in die vier Teilaufgaben Prädiktor – Korrektor – Parametrierung – Schrittweitensteuerung untergliedern. Die von den vier Teilaufgaben bei weitem aufwändigste ist die Korrektoriteration, und zwar nicht nur bezüglich der Rechenzeit, sondern auch bezüglich des theoretischen Hintergrunds und der damit verbundenen rechentechnischen Umsetzung in Programmcode. Aufgabe des Korrektors ist es, ausgehend von einer Anfangsschätzung, die mit einem geeigneten Prädiktorverfahren erzeugt wird, einen Lösungspunkt auf einer stationären bzw. periodischen Trajektorie zu finden. Die Parametrierung bestimmt dabei die Suchrichtung, die Schrittweitensteuerung legt den Abstand der Prädiktorschätzung vom zuletzt berechneten Punkt „auf dem Pfad“ fest.

Die Verfahren der Korrektoriteration unterscheiden zwischen dem stationären und dem periodischen Fall. Zum Auffinden einer stationären Lösung ist lediglich ein aus den Bewegungsgleichungen (5.1) bzw. aus der daraus abgeleiteten Zustandsform (5.17) resultierendes nichtlineares Gleichungssystem mit Hilfe einer Newton-Iteration zu lösen. Die direkte Bestimmung periodischer Lösungen der Bewegungsgleichungen basiert auf einem geeignet formulierten (erweiterten) Randwertproblem (5.42). Wie in den Kapiteln 4 und 5 ausführlich dargelegt, kommt dazu ein abgewandeltes und erweitertes Einzelschießverfahren zum Einsatz, dessen Kernelemente von der Methode der Poincaré-Abbildung, der synchronen Integration der Variationsdifferential- und der Sensitivitätsgleichungen sowie der Transformation von der Deskriptor- auf eine geeignete Zustandsform gebildet werden. Die internen numerischen Integrationen liefern dazu für definierte Zeitpunkte $t = T_R$ den Deskriptorvektor $\mathbf{y}(T_R)$ als Lösungspunkt sowie die Sensitivitäten bezüglich der Anfangswerte der Minimalkoordinaten \mathbf{z}_0 , $\mathbf{S}(T_R) = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{z}_0|_{t=T_R}$, und bezüglich des Verzweigungsparameters p , $\mathbf{S}^p(T_R) = \partial \mathbf{y} / \partial p|_{t=T_R}$.

Dieses Gesamtkonzept einer Verzweigungsanalyse ist zwar sehr eng an die verkoppelten Softwarepakete gebunden, kann im Grunde aber auch als allgemein anwendbares Schema zur Verzweigungsanalyse dynamischer Systeme betrachtet werden. Die einzelnen Module jedes Aufgabenblocks, wie auch jeder dieser übergeordneten Blöcke selbst, sind prinzipiell austauschbar. Beispielsweise könnte im Rahmen dieses Konzepts der Korrektoralgorithmus zur Bestimmung periodischer Lösungen durch ein Mehrfachschießverfahren oder durch eine Kollokationsmethode ersetzt werden. Die enge Ankopplung an das MKS-Programm macht zwar die Anwendung auf entsprechende mechanische Systeme sehr viel effizienter und sicherer – es entfällt das mühselige und fehleranfällige Aufstellen der Bewegungsgleichungen „mit Papier und Bleistift“ – schränkt jedoch den Anwendungsbereich der ursprünglichen Verzweigungsalgorithmen von PATH wie auch der vorgestellten Weiterentwicklungen erheblich ein. Ergo sind beide Versionen auch abgekoppelt direkt zur Untersuchung allgemeiner dynamischer Systeme verfügbar.

6.2 Ausgewählte numerische Aspekte

Wie in Kap. 5 bereits angemerkt, ist eine herausragende Eigenschaft allgemeiner differentiell-algebraischer Gleichungssysteme (5.1), dass dann und nur dann eine eindeutige Lösung $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ existiert, wenn die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}(t_0) = \dot{\mathbf{y}}_0$ konsistent sind. Es wird also gefordert, dass die Startvektoren $\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0$ das gesamte Gleichungssystem inklusive der versteckten Zwangsbedingungen erfüllen. Dabei entspricht die Berechnung konsistenter Anfangsbedingungen der Ausführung der inversen Abbildung (5.18) zum Zeitpunkt $t = t_0, \mathbf{y}(t_0) = \phi_e(\mathbf{z}(t_0))$. Daneben erfordert auch die Integration der VDGL (5.52) sowie der Sensitivitätsgleichungen bezüglich des Systemparameters p entsprechend (4.42) konsistente Sensitivitätsmatrizen $\mathbf{S}(t_0) = \mathbf{S}_0, \mathbf{S}^p(t_0) = \mathbf{S}_0^p$ als Anfangsbedingungen. Die nachfolgend angeführten Schritte zur Bestimmung konsistenter Anfangswerte im Falle der synchronen Integration von nominellem System (5.1) und den Sensitivitätssystemen (5.52)/(4.42) gelten auch für beliebige Zeitpunkte $t \neq t_0$ und decken somit auch die erweiterte inverse Abbildung (5.18) ab. Die Berechnung der Anfangssensitivitäten fußt dabei auf der speziellen Struktur der System-Jacobimatrizen, diese soll deswegen noch vorher im Zusammenhang mit einer effizienten Generierung vorgestellt werden.

Ausgangspunkt seien die impliziten Bewegungsgleichungen $\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, p, t)$ eines MKS in der stabilisierten Index-2-Formulierung (vgl. (5.7))

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{v} + \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\mu} \quad (=: \mathbf{F}^k) \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_e(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda}) \quad (=: \mathbf{F}^d) \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) \quad (=: \mathbf{F}^{z_p}) \quad (6.1c)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{v} \quad (=: \mathbf{F}^{z_v}), \quad (6.1d)$$

einer Darstellung, wie sie von dem Integrator DASSL/DAGSL gefordert wird. Für den Deskriptorvektor gilt jetzt $\mathbf{y} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\mu}^T)^T$. Zur Kennzeichnung als Anfangszustand wird der Einfachheit halber mit „0“ indiziert,

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{x}_a(t_0) = \mathbf{x}_{a,0}, \quad \dots, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}_0} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial \mathbf{z}_0}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial \mathbf{z}_0} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial \mathbf{x}_{a,0}}{\partial \mathbf{z}_0}, \quad \dots$$

6.2.1 System–Jacobimatrizen

Ein wesentlicher Bestandteil einer Integration der Bewegungsgleichungen (6.1) mit einem impliziten Integrationsalgorithmus ist die Korrekturiteration, im Fall von DASSL durchgeführt beispielsweise mittels eines auf (4.34) aufbauenden Quasi–Newton–Verfahrens, [BrenanCampbellPetzold96]. Die (nur bei Bedarf neu ausgewertete) Iterationsmatrix ergibt sich dabei gemäß (4.35) zu $\mathbf{J} = \alpha_0/h \cdot \mathbf{F}_{\dot{\mathbf{y}}} + \mathbf{F}_{\mathbf{y}}$. Gleichzeitig werden aber auch die Sub–Jacobimatrizen $\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{y}}}, \mathbf{F}_{\mathbf{y}}$ zur Auswertung der Sensitivitätsgleichungen (4.32b)/(5.52) bzw. (4.42) benötigt, allerdings neu berechnet in jedem Integrationsschritt. Geeignetes Vorgehen ist deshalb, zunächst die Sub–Jacobimatrizen des aktuellen Integrationsschrittes zu berechnen und diese dann zum einen in der Iterationsmatrix \mathbf{J} zusammenzuführen und zum anderen in die Auswertung der VDGL/Sensitivitätsgleichungen einfließen zu lassen.

Die Ableitung der rechten Seite der Systemgleichung (6.1) nach dem erweiterten Zustandsvektor ergibt die Sub–Jacobimatrix

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial \boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial \boldsymbol{\mu}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^d}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{F}^d}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{F}^d}{\partial \boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial \mathbf{F}^d}{\partial \boldsymbol{\mu}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{z_v}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{z_v}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{z_v}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{z_v}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

deren numerische Auswertung erfolgt entsprechend blockweise. Die vorderen drei Blockspalten werden spaltenweise durch finite Differenzen

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \approx \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{e}_j, \dot{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})}{\Delta}, \quad j = 1, \dots, n_y,$$

approximiert (vgl. Fußnote 3 auf S. 70). Die unteren drei Blöcke der letzten Spalte sind reine $\mathbf{0}$ –Blöcke, wohingegen der oberste Block mit $\partial \mathbf{F}^k / \partial \boldsymbol{\mu} = \mathbf{G}^T = (\partial \mathbf{F}^{z_v} / \partial \mathbf{v})^T$ eigentlich bereits berechnet ist. Die numerisch relativ aufwändige Auswertung der finiten Differenzen kann also für die letzte Blockspalte durch einfache Zuweisungen ersetzt werden. Die Sub–Jacobimatrix bezüglich der Ableitungen $\dot{\mathbf{y}}$ ist eine konstante Blockmatrix,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{n_x \times n_x} & \mathbf{0}^{n_x \times 2n_\lambda} \\ \mathbf{0}^{2n_\lambda \times n_x} & \mathbf{0}^{2n_\lambda \times 2n_\lambda} \end{pmatrix},$$

auch hierbei erübrigt sich also die Approximation mit finiten Differenzen.

6.2.2 Konsistente Anfangsbedingungen: Nominelles System und Variationsdifferentialgleichungen

Zur Integration des nominellen Systems (6.1) (siehe dazu auch Abschnitt 5.1) können lediglich die Anfangswerte der unabhängigen Systemzustände $\mathbf{x}_{u,0} = \mathbf{z}_0$ frei vorgegeben

werden. Die abhängigen Koordinaten $\mathbf{x}_{a,0} = \mathbf{x}_{a,0}(\mathbf{x}_{u,0})$ folgen dann aus dem nichtlinearen Gleichungssystem der Zwangsbedingungen (6.1c), (6.1d), gleichbedeutend mit der Auswertung der inversen Abbildung (5.16). Darauf aufbauend werden die Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{\lambda}_0(\mathbf{x}_0)$ allgemein nach (5.4) berechnet. Wie in [BrenanCampbellPetzold96, S. 37] nachgewiesen, gilt für die zusätzliche algebraische Variable stets $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, entsprechend wird auch $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$ gesetzt. Somit ist der konsistente Anfangszustand \mathbf{y}_0 vollständig beschrieben, da das Integrationsverfahren aber auf einer impliziten Formulierung der Bewegungsgleichungen basiert, muss auch noch dessen konsistente erste Ableitung $\dot{\mathbf{y}}_0$ vorgegeben werden. Für die differentiellen Koordinaten $\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0(\mathbf{y}_0)$ werden dazu die Differentialgleichungen (6.1a), (6.1b) ausgewertet; die Ableitungen $\dot{\boldsymbol{\mu}}_0, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_0$ werden im Rahmen der Integration mit DASSL nicht weiter gebraucht, man kann deshalb formal noch $\dot{\boldsymbol{\mu}}_0 = \mathbf{0}$ und $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_0 = \mathbf{0}$ setzen.

Die Sensitivitäten der Variationsdifferentialgleichungen (5.52) lassen sich unter der Voraussetzung einer a priori Koordinatenzerlegung blockweise initialisieren,

$$\mathbf{S}_0 = \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial \mathbf{z}_0} = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}_{u,0}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T ; \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{a,0}}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T ; \left(\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_0}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T ; \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_0}{\partial \mathbf{z}_0} \right)^T \right)^T.$$

Entsprechend dem Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen werden zunächst die Sensitivitäten der Minimalkoordinaten mit der Einheitsmatrix initialisiert, $\partial \mathbf{x}_{u,0} / \partial \mathbf{z}_0 = \partial \mathbf{z}_0 / \partial \mathbf{z}_0 = \mathbf{I}$. Wird für $t = t_0$ eine finite Differenzen Approximation auf die erweiterte inverse Abbildung (5.18) angewandt ($\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T$),

$$\frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial \mathbf{z}_{j,0}} \approx \frac{\boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{e}_j) - \boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{z}_0)}{\Delta}, \quad j = 1, \dots, 2n_f, \quad (6.3)$$

(siehe dazu auch Fußnote 3 auf S. 70), können die Anfangssensitivitäten $\partial \mathbf{x}_{a,0} / \partial \mathbf{z}_0$ und $\partial \boldsymbol{\lambda}_0 / \partial \mathbf{z}_0$ aus $\partial \mathbf{y}_0 / \partial \mathbf{z}_0$ extrahiert werden. Der Vollständigkeit halber wird dann noch $\partial \boldsymbol{\mu}_0 / \partial \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}^{n_\lambda \times 2n_f}$ gesetzt.

Für die Anfangssensitivitäten $\partial \mathbf{y}_0 / \partial p$ bezüglich des Systemparameters p kann nahezu analog vorgegangen werden, allerdings sind die Sensitivitäten der Minimalkoordinaten mit einem Nullvektor zu initialisieren, $\partial \mathbf{x}_{u,0} / \partial p = \mathbf{0}$. Die übrigen Anfangsbedingungen sind wiederum aus finiten Differenzen entsprechend (6.3) zu extrahieren bzw. werden ebenfalls mit $\partial \boldsymbol{\mu}_0 / \partial p = \mathbf{0}$ besetzt.

Da nun aber der Ansatz über finite Differenzen lediglich eine Approximation erster Ordnung der gesuchten Anfangssensitivitäten darstellt, wird die Startmatrix \mathbf{S}_0 die VDGL, und hier insbesondere den aus den Zwangsbedingungen abgeleiteten Anteil, nicht notwendigerweise erfüllen. Dabei tritt zusätzlich noch ein Problem zu Tage, wie es in gewisser Weise vergleichbar bereits in Abschnitt 4.3.1 ausführlich diskutiert wird: Der Zähler des Differenzenansatzes (6.3) ist nicht das Ergebnis einer funktionalen Auswertung, sondern folgt aus der toleranzbehafteten Näherungslösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Im Gegensatz zu Abschnitt 4.3.1, wo der Zähler über eine Zeitschrittintegration berechnet wird, fällt jedoch hierbei der Zusatzaufwand durch Berücksichtigung höherer Genauigkeitsanforderungen $NTOL$ (siehe Anhang A) nicht oder nur wenig ins Gewicht. Eine sorgfältige Abstimmung des Inkrements Δ mit der Genauigkeitsschranke $NTOL$

sollte in den meisten Fällen eine befriedigende Genauigkeit von \mathbf{S}_0 sicherstellen; dies kann durch Auswertung der VDGL der Zwangsgleichungen (6.1c), (6.1d) geprüft werden. Die Auswirkungen unterschiedlicher Toleranzen $NTOL$ bei der Bestimmung der Anfangsensitivitäten sind beispielhaft in den Abb. 6.10–6.12 auf S. 138ff dargestellt.

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Sensitivitätsmatrix \mathbf{S}_0 folgt in direkter Analogie der Bestimmung eines konsistenten nominellen Anfangszustandes \mathbf{y}_0 durch Auswertung der algebraischen Nebenbedingungen. Die Berechnung lässt sich unter Ausnutzung der Blockstruktur auf die Lösung linearer Gleichungssysteme reduzieren. Aus der Zwangsbedingung (6.1c) erhält man die entsprechende Zwangsbedingung der VDGL durch vollständige Differentiation nach \mathbf{z}_0 ,

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}_0} + \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{z}_0} = \frac{\partial \mathbf{F}^{z_p}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}_0} \quad \left(= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}_0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}_0} \right), \quad (6.4)$$

wobei aus Konsistenzgründen die Sub-Jacobimatrix $\mathbf{F}_p^{z_p}$ als der entsprechende Block aus der konsistent berechneten System-Jacobimatrix (6.2) extrahiert wird (d.h. bei der praktischen Umsetzung wird nicht auf die Matrix \mathbf{G} der Zwangskraftrichtungen zurückgegriffen). Ausgewertet für $t=t_0$ bleiben mit den blockweisen Zerlegungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial \mathbf{z}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{u,0}}{\partial \mathbf{p}_{u,0}} & \frac{\partial \mathbf{p}_{u,0}}{\partial \mathbf{v}_{u,0}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_{a,0}}{\partial \mathbf{p}_{u,0}} & \frac{\partial \mathbf{p}_{a,0}}{\partial \mathbf{v}_{u,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_{a,0}}{\partial \mathbf{p}_{u,0}} & \frac{\partial \mathbf{p}_{a,0}}{\partial \mathbf{v}_{u,0}} \end{pmatrix}$$

und $\partial \mathbf{F}_0^{z_p} / \partial \mathbf{p} = (\partial \mathbf{F}_0^{z_p} / \partial \mathbf{p}_u, \partial \mathbf{F}_0^{z_p} / \partial \mathbf{p}_a)$ die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{z_p}}{\partial \mathbf{p}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{a,0}}{\partial \mathbf{p}_{u,0}} &= - \frac{\partial \mathbf{F}_0^{z_p}}{\partial \mathbf{p}_u} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_0^{z_p}}{\partial \mathbf{p}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{a,0}}{\partial \mathbf{v}_{u,0}} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

also insgesamt $n_\lambda n_z$ Gleichungen für ebenso viele unbekannte $\partial \mathbf{p}_{a,0} / \partial \mathbf{z}_0$.

Wird die Index-2-Nebenbedingung der VDGL in analoger Weise zerlegt und umgeformt, folgen mit $\partial \mathbf{v}_{u,0} / \partial \mathbf{p}_{u,0} = \mathbf{0}$ und $\partial \mathbf{v}_{u,0} / \partial \mathbf{v}_{u,0} = \mathbf{I}$ die Sensitivitäten $\partial \mathbf{v}_{a,0} / \partial \mathbf{z}_0$ durch Lösen vergleichbarer linearer Gleichungssysteme. Als Sub-Jacobimatrix $\mathbf{F}_v^{z_v}$ sollte dabei ebenfalls der entsprechende Block aus der System-Jacobimatrix (6.2) extrahiert werden, die analytische Umformung $\mathbf{F}_v^{z_v} = \mathbf{G}$ kann zu Inkonsistenz führen. Eine weitere Ableitung ergibt die versteckte Zwangsbedingung vom Index 1 der VDGL, die sich in Kombination mit den VDGL der dynamischen Gleichungen (6.1b) auch wieder auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Anfangssensitivitäten $\partial \boldsymbol{\lambda}_0 / \partial \mathbf{z}_0$ umformulieren lässt. Und dabei wird das Dilemma dieses Ansatzes deutlich: Der letzte Schritt erfordert die dritte Ableitung der Lagezwangsbedingung, wobei der Term $\mathbf{G}_{pp} = \partial^3 \mathbf{g}(\mathbf{p}) / \partial \mathbf{p}^3$ auftritt. Dessen Berechnung ist unter numerischen Gesichtspunkten als durchaus kritisch einzustufen; aus diesem Grund wird im Normalfall auch auf die Näherung über finite Differenzen (6.3) zur Berechnung konsistenter Anfangssensitivitäten zurückgegriffen.

Zur Berechnung der Ableitungen $\dot{\mathbf{S}}_0 = \partial \dot{\mathbf{y}}_0 / \partial \mathbf{z}_0$ ist es ausreichend, nur die Differentialgleichungen (6.1a), (6.1b) zu betrachten; deren Differentiation $\partial(\cdot)/\partial \mathbf{z}_0$ ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{k,d}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}_0} + \frac{\partial \mathbf{F}^{k,d}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{z}_0} = \mathbf{0} .$$

Daraus folgt dann unter Beachtung von $\partial \mathbf{F}^{k,d} / \partial \dot{\mathbf{y}} = [\mathbf{I} \mid \mathbf{0}]$ die Ableitung der Sensitivitäten der Lage- und Geschwindigkeitskomponenten

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_0}{\partial \mathbf{z}_0} = - \frac{\partial \mathbf{F}_0^{k,d}}{\partial \mathbf{y}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial \mathbf{z}_0} .$$

Analog zu $\dot{\boldsymbol{\mu}}_0, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_0$ (s.o.) kann dann doch formal $\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}_0 / \partial \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$, $\partial \dot{\boldsymbol{\mu}}_0 / \partial \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ gesetzt werden.

Die Sensitivitätsgleichung bezüglich des Verzweigungsparameters p lautet

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} = \mathbf{0} , \quad \dim \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p} \right) = \dim \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial p} \right) = n_y \times 1 . \quad (6.5)$$

Gemäß dem Vorgehen im Falle von $\partial(\cdot)/\partial \mathbf{z}_0$ folgt daraus neben den Anfangsbedingungen $\partial \mathbf{y}_0 / \partial p$ noch

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_0}{\partial p} = - \frac{\partial \mathbf{F}_0^{k,d}}{\partial \mathbf{y}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} ,$$

weiter kann wiederum formal $\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}_0 / \partial p = \mathbf{0}$, $\partial \dot{\boldsymbol{\mu}}_0 / \partial p = \mathbf{0}$ gesetzt werden.

Damit sind sowohl für das nominelle System (6.1) als auch für die zugehörigen VDGL (5.52) und die Sensitivitätsgleichungen (6.5) konsistente Anfangswerte verfügbar. Die Berechnungen für einen konsistenten Deskriptorvektor \mathbf{y}_0 gelten ebenso für alle Zeiten t und setzen damit die erweiterte inverse Abbildung $\boldsymbol{\phi}_e : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{y}$ um.

6.3 Modellierungsaspekte

Um die Lage eines starren Radsatzes im Gleis vollständig zu beschreiben, sind die in Abb. 5.1 auf S. 99 dargestellten, insgesamt sechs Zustandsgrößen $\mathbf{p} = (s, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)^T$ erforderlich. Dabei repräsentieren y, z, φ, ψ kleine Bewegungen relativ zu einem auf der Gleismittellinie geführten Gleiskoordinatensystem, s die große Absolutbewegung entlang der Gleismittellinie und ϑ die Eigendrehung des Radsatzes. Soll nun eine Verzweigungsanalyse bezüglich der stationären und/oder periodischen Lösungen der Bewegungsgleichungen eines Radsatzes (eines Drehgestells, eines vollständigen Schienenfahrzeuges) durchgeführt werden, ergibt sich ein zweifaches Problem: Zum einen wird eine Verzweigungsanalyse häufig mit der Fahrgeschwindigkeit des Fahrzeuges als Verzweigungsparameter durchgeführt, $p = \dot{s}_p$, wodurch s, \dot{s} nicht mehr (direkt) als Zustandsgrößen betrachtet werden dürfen. Zum anderen bezeichnen sowohl s, \dot{s} als auch die Eigendrehung $\vartheta, \dot{\vartheta}$ große, absolute Bewegungen; demnach sind also weder $s(t), \vartheta(t)$ periodisch noch sind $\dot{s}(t), \dot{\vartheta}(t)$ stationär¹.

¹Die Fahrt im geraden Gleis oder im konstanten Bogen mit $\dot{s} \neq 0$ bzw. $\dot{\vartheta} \neq 0$ wird bei verschwindenden Relativbewegungen deshalb häufig auch als nur quasistationär bezeichnet; siehe dazu auch die Anmerkungen zur quasistationären Bogenfahrt in Abschnitt 2.2.2.

Die Gesamtproblematik kann am einfachsten dadurch gelöst werden, dass jedem inertial gekoppelten Körper im MKS-Modell – das sind üblicherweise die Radsätze sowie eventuell die Drehgestelle und der Wagenkasten – eine konstante Fahrgeschwindigkeit $\dot{s}(t) = \dot{s}_p = p$ als Verzweigungsparameter aufgeprägt wird. Die Lage des Körpers i auf der Gleismittel- linie zum Zeitpunkt t erhält man dann aus der Bogenlänge $s_i(t) = s_{i,0} + \dot{s}_p(t - t_0)$ mit der Anfangslage $s_i(t_0) = s_{i,0}$. Eine relative Längsbewegung bleibt dabei ebenso wie die Eigendrehung der Räder/Radsätze unberücksichtigt. Zu der in Abschnitt 2.1.4 angeführ- ten Berechnung der Schlupfkkräfte zwischen Rad und Schiene in Abhängigkeit von den Starrkörperschlupfen (auf die Fahrgeschwindigkeit bezogene Relativgeschwindigkeiten im Kontaktpunkt) ist dann jedoch die Eigendrehung der Räder mit einer konstanten Drehge- schwindigkeit $\omega_p = \dot{\vartheta}_p = -\dot{s}_p/R_0$ bei nominellem Radrollradius R_0 anzunähern. Die für eine realistische Simulation erforderlichen Schlupf- und Schlupfkraftanteile entstehen dann aus der zeitlichen Variation der Rollradien. Varianten dieser Modellvereinfachung sind die zusätzliche Berücksichtigung der konstanten Drehgeschwindigkeit ω_p der Radsätze auch bei der Auswertung der rotatorischen Anteile der Bewegungsgleichungen oder, analog zur obigen Handhabung konstanter Fahrgeschwindigkeiten, das Aufprägen einer konstanten Eigendrehung auf die Radsätze. In jedem Fall vermindert sich die Anzahl der Zustands- größen zur Lagebeschreibung eines Radsatzes im Gleis auf vier, $\mathbf{p} = (y, z, \varphi, \psi)^T$.

Allerdings ist in [Slivsgaard95, S. 66ff] exemplarisch gezeigt, dass die Rotationsgeschwin- digkeit $\vartheta(t) = \omega(t)$ eines Radsatzes bzw. deren zeitabhängige Änderung sehr wohl die Dynamik beeinflussen kann. Aus diesem Grund findet dort eine Störung der Drehge- schwindigkeit über eine einzelne Zusatzdifferentialgleichung $\Delta\dot{\omega} = h(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \Delta\omega)$ Eingang in die Bewegungsgleichungen, der zugehörige Drehwinkel bleibt unberücksichtigt. Diese Art der Modellierung kommt auch in anderen Arbeiten wie [Franke98] zur Anwendung.

Eine andere Möglichkeit der Modellierung der großen Bewegungen besteht in der Super- position eines Bewegungsanteils mit konstanter Geschwindigkeit mit einer kleinen, zeit- variablen Störung, die dann als weitere Zustandsgröße behandelt wird:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{s}_0 + \Delta\dot{s}(t) & \dot{\vartheta}(t) &= \dot{\vartheta}_0 + \Delta\dot{\vartheta}(t) \\ s(t) &= s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \Delta s(t) & \vartheta(t) &= \vartheta_0 + \dot{\vartheta}_0(t - t_0) + \Delta\vartheta(t) . \end{aligned}$$

Die konstanten Anteile werden entweder vorgegeben, $\vartheta_0 = 0$, $s_0 := s(t_0)$, oder folgen aus dem Verzweigungsparameter p und dem nominellen Radradius R_0 , $\dot{s}_0 = \dot{s}_p = p$, $\dot{\vartheta}_0 = -\dot{s}_p/R_0$. Somit beschreiben dann die Zustandsvektoren $\mathbf{p} = (\Delta s, y, z, \varphi, \Delta\vartheta, \psi)^T$, $\mathbf{v} = \dots$ im stationären/periodischen Fall ausschließlich auch stationäre/periodische Rela- tivbewegungen. Da ϑ_0 jedoch nur eine Näherung für den wahren Mittelwert von $\vartheta(t)$ darstellt, ist es unter numerischen Gesichtspunkten angeraten, zumindest die Zustands- größe $\Delta\vartheta$ in den Verzweigungsalgorithmen nicht zu berücksichtigen.

6.4 Numerische Untersuchungen anhand einfacher Testbeispiele

Bevor die bisher entwickelten Verfahren zur Verzweigungsanalyse dynamischer Systeme auf ein detailliertes und damit zwangsläufig komplexes Simulationsmodell eines Schienen-

fahrzeuges angewendet werden, sind die Algorithmen zuerst anhand kleinerer Testbeispiele einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Bei den Testbeispielen handelt es sich um das mathematische Pendel, erweitert um eine parametrisierte nichtlineare Dämpferkraft, einen einzelnen Radsatz, der in einem Führkörper gefesselt ist sowie um ein einfaches Modell eines Drehgestells. Eine umfassende Verzweigungsanalyse dieser Testmodelle ist dabei nicht das Ziel, sondern die Demonstration der prinzipiellen Anwendbarkeit der eingesetzten Algorithmen wie auch die Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Verfahrensparameter. Daneben werden die Ergebnisse im Hinblick auf eine zumindest partielle Verifikation falls möglich mit entsprechenden Untersuchungen aus der Literatur oder mit analytisch berechneten Ergebnissen verglichen.

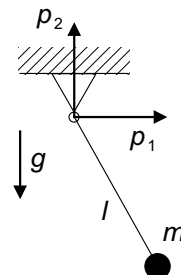
Für die Wiedergabe der Ergebnisse in Verzweigungsdiagrammen gelten in allen Beispielen die in Abschnitt 3.1 getroffenen Konventionen. Daneben sind Hopfverzweigungen mit einem Kreis \bigcirc gekennzeichnet, Sattelpunktverzweigungen mit einem Dreieck ∇ und Gabelverzweigungen mit einem Dreieck \triangle .

Das Stabilitätsverhalten der stationären Lösungen ist in Wurzelortskurven dargestellt. Abgebildet werden dabei die $2n_f$ Eigenwerte λ_i der auf Zustandsform transformierten Bewegungsgleichungen in der komplexen Ebene; Stabilitätsgrenze ist die imaginäre Achse $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$. Die Größe der Kreuze wächst proportional mit der Zahl der Verfolgungsschritte. Dargestellt ist meist nur die obere Halbebene in der näheren Umgebung der imaginären Achse. Für die $2n_f - 1$ verbleibenden Floquet-Multiplikatoren μ_i periodischer Lösungen ist eine vergleichbare Darstellung gewählt, die Stabilitätsgrenze wird in diesem Fall durch den Einheitskreis gebildet. Verzweigungspunkte sind wie in den Verzweigungsdiagrammen besonders hervorgehoben. Eine Beurteilung der Güte der Floquet-Multiplikatoren wird durch die Darstellung der Testfunktion (4.25) des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix ermöglicht, die alleinige Betrachtung dessen Realteil ist dabei meist ausreichend.

6.4.1 Mathematisches Pendel mit nichtlinearer Dämpfung

Ein einfaches Testbeispiel zur Untersuchung numerischer Methoden für nichtlineare dynamische Systeme aus dem Bereich der Mehrkörperdynamik wird in [Franke98] unter der Bezeichnung „HopfpPENDel“ definiert und sowohl analytisch als auch numerisch untersucht. Grundlage des Modells ist das mathematische Pendel mit normierten Modellparametern l, m, g , auf dessen Massepunkt unter Hintanstellung einer mechanischen Interpretation eine nichtlineare laterale Dämpferkraft wirkt. Bei Verwendung kartesischer Koordinaten erhält man die Bewegungsgleichungen des MKS in der Deskriptorform (5.1) zu

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= v_1 \\ \dot{p}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_1 &= -\lambda p_1 - \alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_1 (v_1^2 - 1) \\ \dot{v}_2 &= -\lambda p_2 - 1 \\ 0 &= p_1^2 + p_2^2 - 1, \end{aligned}$$



wobei $\alpha_1 \geq 0$ und $\alpha_2 \geq 0$ die Dämpferkoeffizienten repräsentieren. Die Zustandsform dieser Bewegungsgleichungen wird nach Abschnitt 5.3 mit den Minimalkoordinaten $\mathbf{z} = (p_1, v_1)^T$ gebildet, λ ist die verallgemeinerte Zwangskraft.

Der Vorteil dieses einfachen Systems ist, dass das sich einstellende Verhalten bei einer Variation der Dämpferparameter α_1, α_2 analytisch angegeben werden kann. Für $\alpha_1 > 0$ erzeugt der hintere Dämpfungsterm $\alpha_1 v_1 (v_1^2 - 1)$ bei $|v_1| > 1$ eine positive (dämpfende) und bei $0 < |v_1| < 1$ eine negative (anfachende) Zusatzkraft. Damit folgt eine asymptotisch stabile stationäre Lösung im Bereich $\alpha_1 < \alpha_2$, der zugehörige Lösungsast verzweigt bei $\alpha_1 = \alpha_2$ in einer überkritischen Hopfverzweigung in einen instabil stationären und einen stabil periodischen Ast für $\alpha_1 > \alpha_2$. Die Schwingungsdauer der periodischen Lösung in der Hopfverzweigung beträgt $T_P = 2\pi$. In den folgenden Untersuchungen wird als Verzweigungsparameter der Dämpfungsparameter α_1 variiert, der zweite Dämpfungsparameter wird mit $\alpha_2 = 1.0$ festgehalten.

Das Ergebnis einer Verzweigungsanalyse im Parameterbereich $0.1 < \alpha_1 < 6.27$ ist in dem Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.3 wiedergegeben, die Stabilität der dabei berechneten Lösungen kann dem Verlauf der Eigenwerte/Floquet-Multiplikatoren in Abb. 6.4 entnommen werden. Die Einstellung der wichtigsten Verfahrensparameter zur Fortsetzung der stationären und periodischen Lösungen in Tab. 6.1 ist unter numerischen Gesichtspunkten ob der Einfachheit der zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen als unkritisch zu beurteilen; die einzelnen Parameter werden im Anhang A näher erläutert. Da die Trajektorien mit relativ hoher Genauigkeit ($ATOL = RTOL = 10^{-9}$) ohne bedeutenden Zeitaufwand integriert werden können, sind auch die periodischen Lösungen mit einem nur geringen Fehler $\varepsilon_{\mathbf{z}} = \|\mathbf{z}(t=0) - \mathbf{z}(t=T_P)\| \leq EPSZ = 10^{-8}$ behaftet; und folglich ist auch die Stabilitätsanalyse als sehr zuverlässig zu erwarten.

Parameter	TOL	NTOL	EPSR	EPSZ	EPSL	EPSG	HMAX
stationär	–	10^{-6}	–	10^{-8}	–	10^{-6}	0.25
periodisch	10^{-9}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-8}	0.02	10^{-6}	0.25

Tabelle 6.1: Mathematisches Pendel mit nichtlinearer Dämpfung: Einstellung der Verfahrensparameter zur Verfolgung stationärer bzw. periodischer Lösungen (vgl. Anhang A).

Die Verzweigungsanalyse startet mit kleinen Parameterwerten $\alpha_1 > 0$ und erreicht nach wenigen Schritten den Bereich der Hopfverzweigung mit $\hat{\alpha}_{1,H} = 1.0$, die durch die unmittelbar anschließende Nachiteration mit sehr kleinem relativem Fehler $\varepsilon_{\alpha_1} = |\hat{\alpha}_{1,H} - \alpha_{1,H}| / \hat{\alpha}_{1,H} \approx 3 \cdot 10^{-7}$ detektiert wird ($\alpha_{1,H}$ ist der numerisch berechnete Wert der Hopfverzweigung, $\hat{\alpha}_{1,H}$ deren exakter Wert). Als Schätzwert für die Periode der Lösung in der Nähe der Hopfverzweigung wird von PATH $T_{P,H} = 6.28319 \approx 2\pi$ ausgegeben. Der nachfolgende instabil stationäre Ast wird dann problemlos mit der maximalen Verfolgungsschrittweite $h = h_{\max} = 0.25$ fortgesetzt. Zur Verfolgung des stabil periodischen Lösungsastes muss dessen näherungsweise berechneter Anfangstangente zunächst die positive Parameterichtung vorgegeben werden. Da das Verhalten im Verzweigungspunkt selbst unbestimmt ist, gilt es daneben noch, durch einen (kleinen) Schritt entlang dieser Tangente eine geeignete Anfangsschätzung im Einzugsbereich einer periodischen Lösung vorab zu berechnen.

Davon ausgehend wird dann der periodische Lösungszweig größtenteils auch wieder mit der Maximalschrittweite $h = h_{\max}$ generiert. Wie erwartet geht dieser Ast asymptotisch gegen $p_1 = 1.0$, das Pendel schwingt also gegen die Horizontallage und auch darüber hinaus.

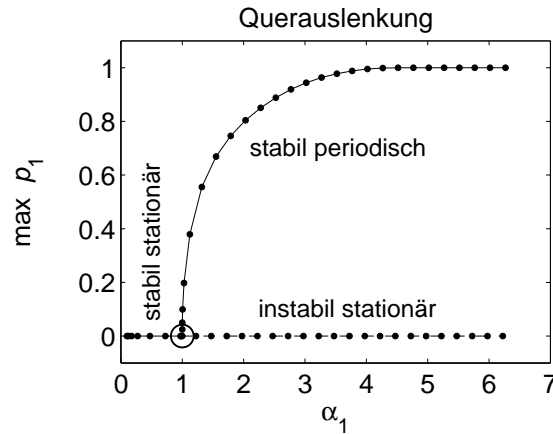


Abbildung 6.3: Mathematisches Pendel mit nichtlinearer Dämpfung: Numerisch berechnetes Verzweigungsdiagramm mit stabil stationärem, instabil stationärem und stabil periodischem Lösungszweig bei Variation des Dämpfungsparameters α_1 . Die Verfolgung wird bei $\alpha_1 \approx 6.27$ angehalten.

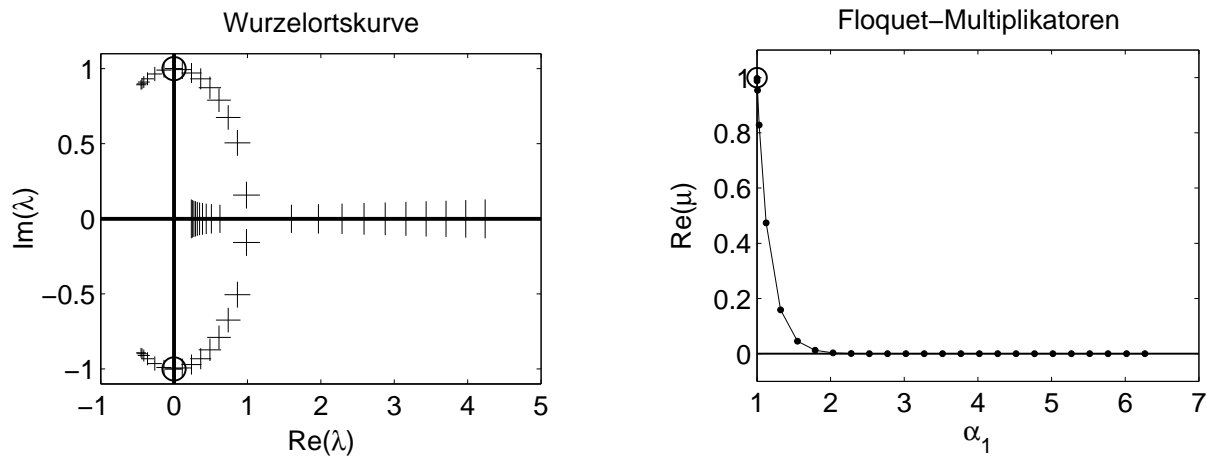


Abbildung 6.4: Mathematisches Pendel mit nichtlinearer Dämpfung: Stabilitätsanalyse zum Verzweigungsdiagramm 6.3. Da stets $\text{Im}(\mu_2) = 0$ gilt, ist rechts nur der Realteil des Floquet-Multiplikators μ_2 dargestellt.

Anhand des Verlaufs der Eigenwerte der stationären Lösung in Abb. 6.4 links ist gemäß Abschnitt 3.2.4 erkennbar, dass es sich bei der gefundenen Verzweigung um eine Hopf-Verzweigung handelt (gekennzeichnet durch ein symmetrisches, rein imaginäres Eigenwertpaar). Aus den beiden Floquet-Multiplikatoren als Eigenwerte der Monodromiematrix (5.44) folgt die Testfunktion (4.25) des 1.0-Eigenwerts für jeden Lösungspunkt mit sehr geringem numerischem Fehler $|\text{Re}(\mu_1) - 1.0| < 8 \cdot 10^{-7}$ (nicht dargestellt). Da der verbleibende Eigenwert μ_2 ebenfalls stets rein reeller Natur ist, zeigt Abb. 6.4 rechts

lediglich dessen Realteil aufgetragen über dem Parameter α_1 . Dieser Eigenwert tendiert ausgehend von der Hopfverzweigung exponentiell gegen Null wodurch ein sehr stabiles periodisches Lösungsverhalten angezeigt wird.

Das Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.3 und der Verlauf des Floquet-Multiplikators μ_2 in Abb. 6.4 (bei $\mu_1 \approx 1.0$) sind sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr ähnlich zu den entsprechenden Ergebnissen in [Franke98]. Die Testfunktion (4.25) des 1.0-Eigenwerts μ_1 der Monodromiematrix („defect“) wird dort mit einem maximalen numerischen Fehler in der Größenordnung von 10^{-4} (hier: 10^{-7} , s.o.) berechnet. Allerdings werden in [Franke98] weder ein numerisch berechneter Zahlenwert für $\alpha_{1,H}$ zur Kennzeichnung der Hopfverzweigung noch für die zugehörige Periodendauer $T_{P,H}$ explizit angegeben.

6.4.2 Rad–Schiene–System: Einzelradsatz

Als erstes Testmodell aus dem Rad–Schiene Bereich soll nun der bereits in Abschnitt 2.1.5 eingeführte gefesselte Einzelradsatz einer numerischen Verzweigungsanalyse unterzogen werden. Eine Modellskizze ist gemeinsam mit den Modelldaten wie Abmessungen, Massengeometrie und Parametern der Aufhängung sowie den verwendeten Rad–Schiene–Parametern in Anhang B.1 aufgeführt. Dabei wird eine in Deutschland häufig anzutreffende Konfiguration auf der Grundlage der Verschleißprofilpaarung *S1002/UIC60–ORE* für Rad und Schiene herangezogen. Die dieser Profilpaarung innewohnende Änderung der lateralen Radkontaktpunktlage ist gemeinsam mit den Profilquerschnitten in Abb. 2.5 auf S. 20 aufgezeigt. Die Schlupfkkräfte werden mit dem Algorithmus FASTSIM ([Kalker90]) berechnet, siehe dazu auch Abb. 2.6 auf S. 22.

Das Simulationsmodell besteht aus lediglich einem einzigen Starrkörper, in dem die Radsatzachse sowie die beiden Radscheiben vereinigt sind. Der Radsatz ist zur ungefähren Nachbildung der Primäraufhängung in einem kinematisch mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der Gleismittellinie geführten Dummy–Körper aufgehängt, der keinerlei Bewegungsfreiheit besitzt. Die Primärstufe setzt sich aus symmetrisch angeordneten Feder–Dämpfer–Elementen mit linearer Kraft–Weg–Kennlinie zusammen, die in alle drei Raumrichtungen wirken. Unter dem Gesichtspunkt möglichst realistischer Radaufstandskräfte und Kontaktvorgänge zwischen Rad und Schiene wird die Gesamtgewichtskraft von Wagenkasten, Drehgestellrahmen und sonstiger Bauteile anteilig durch eine konstante äußere Vertikalkraft F_L ersetzt. Diese wirkt auf den Radsatzschwerpunkt.

Entsprechend der in Abschnitt 6.3 diskutierten einfacheren Modellierung wird der Radsatz mit konstanter Geschwindigkeit v kinematisch entlang der geraden Trasse geführt, eine Eigendrehung mit konstanter Drehgeschwindigkeit wird lediglich zur Berechnung der Schlupfkkräfte berücksichtigt. Es verbleiben also die vier Lagezustandsgrößen $\mathbf{p} = (y, z, \varphi, \psi)^T$. Rechter und linker Kontakt zwischen Rad und Schiene sind durch die aus dem quasi-elastischen Kontaktmodell folgende Zwangsbedingung (2.6) modelliert, die Bewegungsgleichungen resultieren also in der differentiell–algebraischen Formulierung (5.1). Die erforderliche Reduktion der Bewegungsgleichungen auf die in Abschnitt 5.3.1 beschriebene Zustandsform ③ bedingt die a–priori–Partitionierung des Zustandsvektors in abhängige und unabhängige Koordinaten, es wird $\mathbf{p}_a = (z, \varphi)^T$, $\mathbf{p}_u = (y, \psi)^T$ gewählt. Diese

Aufteilung ist bereits am Ende von Abschnitt 5.3.1 beispielhaft für einen einzelnen Radsatz ausgeführt, die einzelnen Koordinaten zeigt Abb. 5.1 auf S. 99. Damit sind aber auch die jeweiligen Systemdimensionen festgelegt, es gilt:

$$n_p = n_v = 4, \quad n_\lambda = 2 \quad \implies \quad n_f = 2, \quad n_z = 4, \quad n_y = 12, \quad n_{\text{tot}} = 72$$

Die Bedeutung und Berechnung der einzelnen Dimensionen ist in den Kapiteln 4 und 5 an entsprechender Stelle behandelt. Im Rahmen des größeren zweiten Testmodells werden diese im nachfolgenden Abschnitt 6.4.3 nochmals ausführlicher erläutert.

Verzweigungsanalyse

Eine Verzweigungsanalyse des Radsatzmodells im relevanten Geschwindigkeitsbereich $5 \text{ m/s} \leq v < 100 \text{ m/s}$ auf der Grundlage der in Tab. 6.2 zusammengestellten Verfahrensparameter (siehe Anhang A) führt auf das Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.5 (links). Repräsentiert wird das Fahrzeugverhalten in Abhängigkeit von dem Verzweigungsparameter Fahrgeschwindigkeit v durch die maximale Querauslenkung des Radsatzes bezüglich der Gleismittellinie. Die Eigenwerte/Floquet-Multiplikatoren der stationären/periodischen Attraktoren zur Beurteilung von deren Stabilität sowie zur Charakterisierung der Verzweigungspunkte zeigt Abb. 6.6. Die Werte der Testfunktion (4.25) des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix sind in Abb. 6.5 (rechts) zusammengefasst.

<i>Parameter</i>	<i>TOL</i>	<i>NTOL</i>	<i>EPSR</i>	<i>EPSZ</i>	<i>EPSL</i>	<i>EPSG</i>	<i>HMAX</i>
stationär	–	10^{-9}	–	10^{-8}	–	10^{-5}	1.0
periodisch 1	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-5}$	0.1	$5 \cdot 10^{-2}$	1.0
periodisch 2	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}	0.02	10^{-5}	1.0

Tabelle 6.2: Einzelradsatz: Einstellung der Verfahrensparameter zur Verfolgung stationärer bzw. periodischer Attraktoren.

Die Verzweigungsanalyse startet im stationären Bereich bei kleinen Geschwindigkeiten, der stationäre Ast wird dann in Richtung zunehmender Geschwindigkeiten verfolgt. Die Hopfverzweigung \bigcirc wird bei der linearen Grenzgeschwindigkeit $v_{\text{lin}} = 40.48 \text{ m/s}$ mit hoher Genauigkeit detektiert. Die Verfolgung des anschließenden instabil stationären Astes wird problemlos bis zur festgesetzten Maximalgeschwindigkeit $v_{\text{max}} = 100.0 \text{ m/s}$ mit maximaler Schrittweite ausgeführt. Der von der Hopfverzweigung ausgehende instabil periodische Ast wird nicht weiter verfolgt, er ist jedoch in Abb. 6.5 (links) zur besseren Orientierung durch eine gestrichelte Linie angedeutet.

Zur Bestimmung des stabil periodischen Astes wird zunächst ein Punkt auf diesem Ast bei $v = 45.0 \text{ m/s}$ durch eine externe Integration bestimmt. Davon ausgehend wird der Teil 1 dieses Astes in Richtung sinkender Geschwindigkeiten verfolgt. Mit zunehmender Annäherung an die Sattelpunktverzweigung, dem Übergang von stabil zu instabil periodischem Verhalten also, der durch einen reellen Eigenwert der Monodromiematrix auf

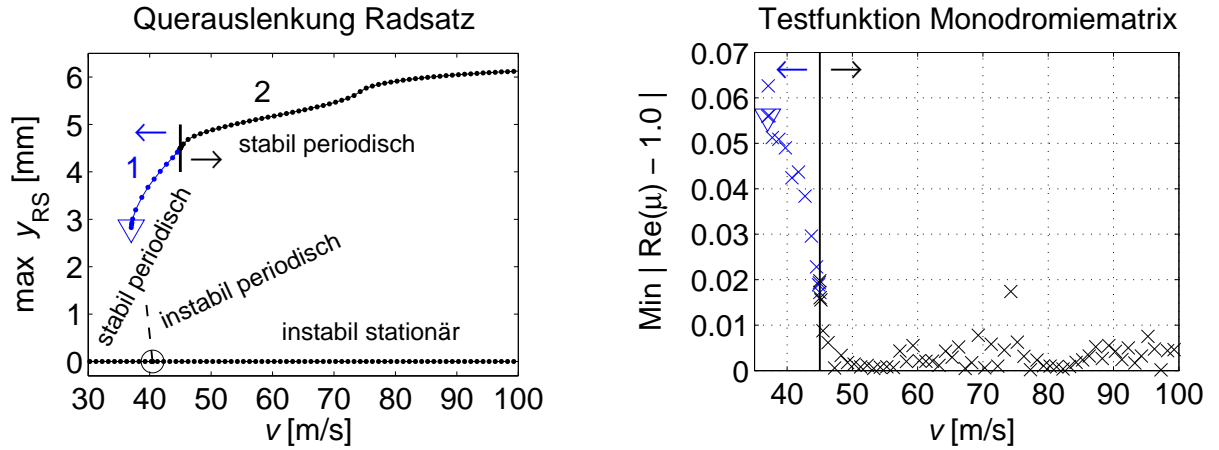


Abbildung 6.5: Einzelsatz: *Links* – Numerisch berechnetes Verzweigungsdiagramm mit lokalisierter Hopf- und Sattelpunktverzweigung. *Rechts* – Testfunktion (4.25) für den Realteil des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix; die zugehörigen Imaginärteile sind identisch Null.

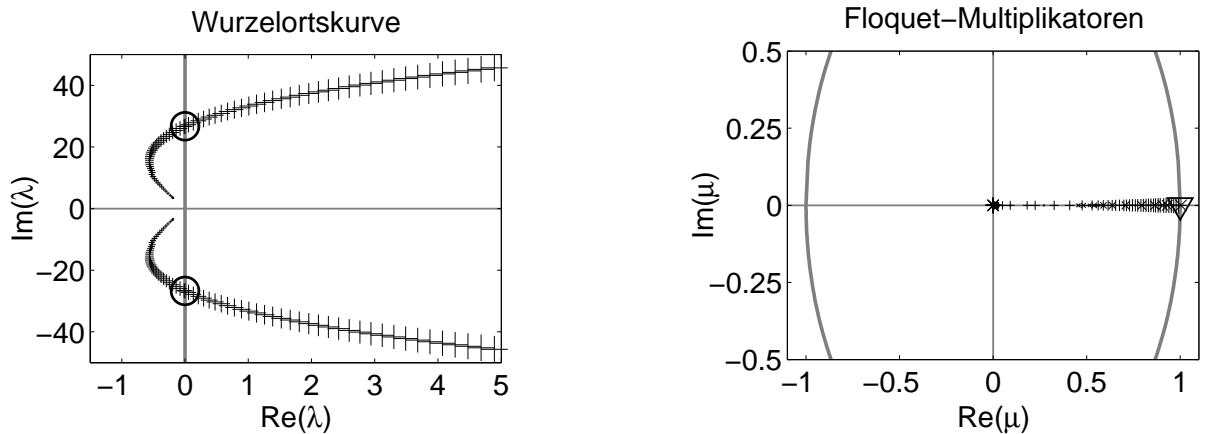


Abbildung 6.6: Einzelsatz: Stabilitätsanalyse zu dem Verzweigungsdiagramm aus Abb. 6.5.

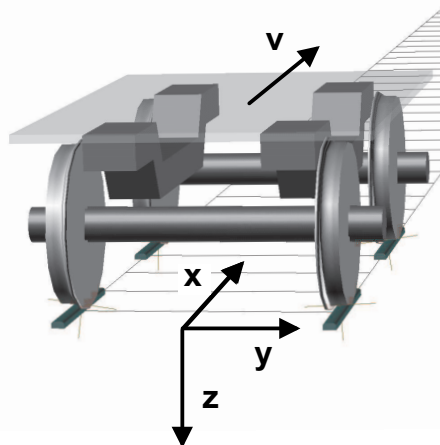
dem Einheitskreis gekennzeichnet ist, wird die Verfolgungsschrittweite in zunehmendem Maße reduziert. Die Sattelpunktverzweigung ∇ wird zwar nur bei relativ grober Genauigkeit $EPSG = 5 \cdot 10^{-2}$ lokalisiert, der mit $\mu_{\text{krit}} = 1.004$ sehr nahe der Stabilitätsgrenze (das ist der Einheitskreis der komplexen Ebene, siehe Abschnitt 3.2.3) liegende kritische Eigenwert bestätigt jedoch nachträglich die Zulässigkeit dieser Vorgehensweise. Man erhält eine nichtlineare Grenzgeschwindigkeit von $v_{\text{nlm}} \approx 37.01$ m/s. Beachtenswert ist in diesem Zusammenhang auch, dass mit Annäherung an den Sattelpunkt der Fehler, der aus der Auswertung der Testfunktion (4.25) der Monodromiematrix resultiert, relativ stark zunimmt; der Maximalfehler über alle j Verfolgungsschritte beträgt $\max_j(\min_i |\text{Re}(\mu_i^j) - 1.0|) = 0.063$, $i = 1, \dots, n_z$. Diese Problematik tritt im nachfolgenden Testmodell ebenfalls zu Tage und wird bei dessen Bewertung noch ausführlicher diskutiert.

Der Teil 2 des periodischen Astes wird ausgehend von $v = 45.0 \text{ m/s}$ in Richtung zunehmender Parameterwerte fortgesetzt. Ab einer Geschwindigkeit $v \approx 75.0 \text{ m/s}$ nähert sich die maximale Querauslenkung des Radsatzes mit $y_{\text{RS,max}} \approx 6.0 \text{ mm}$ dem Spurkranz an, kurz darauf tritt Spurkranzkontakt auf. Dies verdeutlicht auch die Tatsache, dass bei weiter steigenden Geschwindigkeiten die maximale Querauslenkung nur noch schwach degressiv ansteigt. Die Pfadverfolgung wird mit Erreichen der festgesetzten Maximalgeschwindigkeit $v_{\text{max}} = 100.0 \text{ m/s}$ beendet.

6.4.3 Rad–Schiene–System: Drehgestell eines Reisezugwagens

Als zweites Testmodell wird das Drehgestell eines Reisezugwagens untersucht. Das Simulationsmodell baut auf der Beschreibung in [Kaas-Petersen86] auf, berücksichtigt neben einer nichtlinearen Kontaktmechanik im Gegensatz dazu aber auch die aufgrund nichtlinearer Verschleißprofile (siehe Abschnitt 2.1.4) vollständig nichtlineare Kontaktgeometrie zwischen Rad und Schiene. Dieses noch näher zu definierende *Standardmodell* dient als Grundlage für die anschließenden numerischen Untersuchungen. Das *Originalmodell* aus [Kaas-Petersen86] wird in einer Reihe von Arbeiten einer Verzweigungsanalyse sowie anderen Methoden der nichtlinearen Systemdynamik unterzogen, stellvertretend sei auf [True92, JensenTrue97, IsaksenTrue97, GalvanettoBriseghellaBishop97, Hassard00] verwiesen. Es ist deswegen gut als Vergleichsmodell zur Beurteilung/Verifikation der neu implementierten Algorithmen geeignet. Gemeinsam ist all diesen Arbeiten jedoch die Verwendung eines kegeligen Radprofils auf einem kreisförmigen Schienenprofil, die Radflanke wird als spielbehafteter Anschlag mit hoher Federsteifigkeit modelliert. Für einen Ergebnisvergleich soll diese Modellierung auch hier nachvollzogen werden.

Standardmodell



n_p	n_λ	n_f	n_y	n_{tot}
11	4	7	30	480

Abbildung 6.7: Simulationsmodell des Drehgestells in Standardkonfiguration und Übersicht über daraus resultierende Systemdimensionen.

Abb. 6.7 zeigt das Standardmodell des Drehgestells als Ausschnitt aus einer Animationssequenz. Die erforderlichen Modelldaten zu Geometrie, Massengeometrie und Aufhäng-

ungen sind gemeinsam mit den spezifischen Rad-Schiene-Parametern in Anhang B.2 zusammengefasst. Wie bereits beim Einzelradsatz wird dabei wieder eine Konfiguration auf der Grundlage von *S1002/UIC60-ORE* gewählt. Auch hier dient wieder der FASTSIM-Algorithmus zur Berechnung der Schlupkräfte.

Das Simulationsmodell besteht aus je einem Starrkörper pro Radsatz sowie einem weiteren für den Drehgestellrahmen. Die Modellierung der Radsätze entspricht exakt der in Abschnitt 6.4.2 für den Einzelradsatz bereits ausführlich beschriebenen: Jeder Radsatz ist kinematisch mit v geführt und besitzt vier Freiheitsgrade der Lage ($\mathbf{p}_i = (y_i, z_i, \varphi_i, \psi_i)^T$, $i = 1, 2$). Ebenso wird auch wieder die DAGL-Form (5.1) der Bewegungsgleichungen auf die Zustandsform ③ bei analoger Aufteilung in abhängige und unabhängige Koordinaten reduziert.

Der Drehgestellrahmen ist [Kaas-Petersen86] folgend über ein Gelenk mit drei Freiheitsgraden an einen zusätzlichen Führkörper gekoppelt: Rollen φ_3 um die Längsachse, Gieren ψ_3 um die Hochachse und Querverschiebung y_3 . Der Führkörper besitzt keine freie Bewegungsmöglichkeit, ist jedoch mit konstanter Geschwindigkeit v kinematisch entlang der Trasse geführt. Die konstante Fahrgeschwindigkeit v aller Starrkörper bildet auch den Verzweigungsparameter.

Der Führkörper dient der Nachbildung der Sekundäraufhängung zwischen Drehgestell und Wagenkasten. Diese besteht aus je zwei symmetrisch angeordneten Feder-Dämpfer-Elementen, wirkend in lateraler y - bzw. in vertikaler z -Richtung. Die Gierbewegung wird durch eine mittig angebrachte Drehfeder gehemmt. Zwischen Radsatz und Drehgestell ist die Primäraufhängung durch zweimal drei unabhängige, je in eine Koordinatenrichtung wirkende Federelemente modelliert. Sämtliche Feder- und Dämpferelemente weisen lineare Kennlinien auf. Zur Erzeugung realistischer Radaufstandskräfte wird wieder die Gewichtskraft des Wagenkastens und des Drehgestellrahmens anteilig durch eine konstante äußere Vertikalkraft F_L simuliert, die auf den jeweiligen Schwerpunkt der Radsätze wirkt.

Die aus der spezifischen Modellierung resultierenden Systemdimensionen sind in Abb. 6.7 rechts gelistet. Die einzelnen Dimensionen beschreiben die Anzahl der Komponenten der entsprechenden Vektoren; die Bezeichnungen sind bereits in Kapitel 5 eingeführt, die Abhängigkeiten sollen aber nochmals beispielhaft zusammengefasst werden.

Aus der Modellierung der Bewegungsfreiheiten der einzelnen Körper durch die zugeordneten Gelenke ergibt sich die Gesamtzahl der Lage- und Geschwindigkeitskomponenten $n_p = n_v = 11$. Die freien Bewegungen werden durch die $n_\lambda = 4$ Zwangsbedingungen der schleifenschließenden Gelenke (Zwangsbedingungen (2.6)) eingeschränkt. Es verbleiben damit jeweils $n_f = n_p - n_\lambda = 7$ Lage- und Geschwindigkeitsfreiheitsgrade und folglich bei Reduktion auf Zustandsform $n_z = 2n_f = 14$ Minimalkoordinaten. Der vollständige (nominelle) Deskriptorvektor der GGL-Formulierung (5.7) der Bewegungsgleichungen als Grundlage einer Zeitintegration besteht bei Berücksichtigung der n_λ zusätzlichen algebraischen Variablen $\boldsymbol{\mu}$ hingegen aus insgesamt $n_y = 2n_p + 2n_\lambda = 30$ Komponenten. Mit n_y ist auch die Dimension des nominellen Systems zur Integration festgelegt. Erweitert wird der nominelle Deskriptorvektor um die $n_z n_y$ Sensitivitäten bezüglich der Anfangswerte der Minimalkoordinaten, $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{z}_0$, definiert über die VDGL (5.52), sowie um die n_y Sensitivitäten $\partial \mathbf{y} / \partial p$ bezüglich des Verzweigungsparameters p , definiert in den Sensiti-

vitätsgleichungen (4.42). Zur direkten Berechnung periodischer Lösungen der Bewegungsgleichungen sind demnach insgesamt $n_{\text{tot}} = n_y (n_z + 2) = 480$ Komponenten zu bestimmen.

Verzweigungsanalyse des Standardmodells

Eine Verzweigungsanalyse des Standardmodells im relevanten Geschwindigkeitsbereich $5 \text{ m/s} \leq v < 80 \text{ m/s}$ auf der Grundlage der in Tab. 6.3 zusammengestellten Verfahrensparameter (siehe Anhang A) führt auf das Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.8 (links). Repräsentiert wird das Fahrzeugverhalten in Abhängigkeit von dem Verzweigungsparameter Fahrgeschwindigkeit v durch die maximale Querauslenkung des nachlaufenden Radsatzes. Die Eigenwerte/Floquet-Multiplikatoren zur Stabilitätsbeurteilung der Lösungen sowie zur Charakterisierung der Verzweigungspunkte zeigt Abb. 6.9. Die Werte der Testfunktion (4.25) sind in Abb. 6.8 (rechts) zusammengefasst.

Parameter	TOL	NTOL	EPSR	EPSZ	EPSL	EPSG	HMAX
stationär	–	10^{-9}	–	10^{-8}	–	10^{-5}	1.0
periodisch 1	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}	0.05	$5 \cdot 10^{-5}$	1.0
periodisch 2	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}	0.02	10^{-7}	1.0

Tabelle 6.3: Drehgestell, Standardmodell: Einstellung der Verfahrensparameter zur Verfolgung stationärer bzw. periodischer Attraktoren.

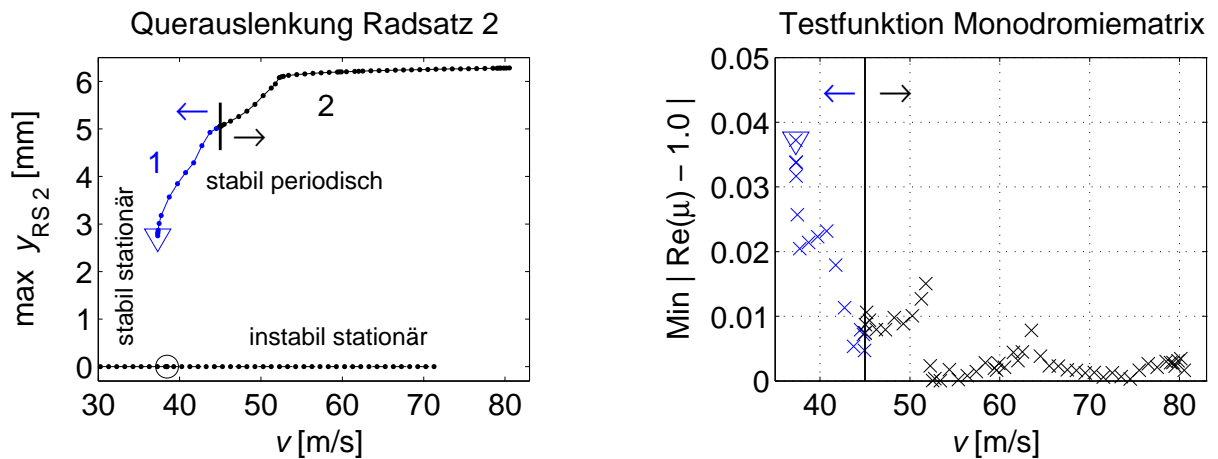


Abbildung 6.8: Drehgestell, Standardmodell: *Links* – Numerisch berechnetes Verzweigungsdiagramm mit lokalisierter Hopf- und Sattelpunktverzweigung. *Rechts* – Testfunktion (4.25) für den Realteil des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix; die zugehörigen Imaginärteile sind identisch Null.

Wird die Pfadverfolgung ausgehend von kleinen und in Richtung zunehmender Geschwindigkeiten durchgeführt, stellt sich zunächst das den normalen Fahrbetrieb charakterisierende stabil stationäre Verhalten der Lösungen ein. Bei der linearen Grenzgeschwindigkeit $v_{\text{lin}} = 38.45 \text{ m/s}$ verzweigt der stationäre Lösungsast in einer unterkritischen Hopfverzweigung \bigcirc – erkennbar an dem rein imaginären Eigenwertpaar der Wurzelortskurve

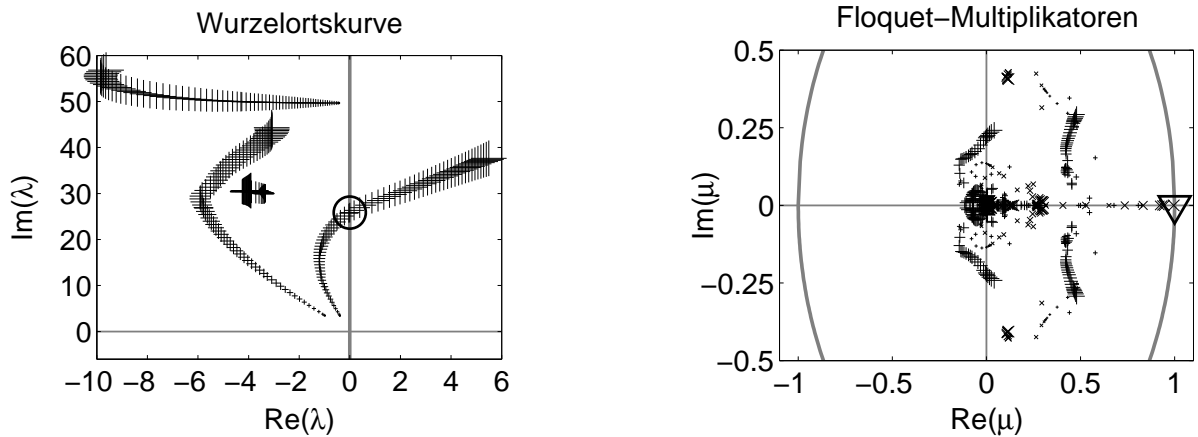


Abbildung 6.9: Drehgestell, Standardmodell: Stabilitätsanalyse zu dem Verzweigungsdiagramm aus Abb. 6.8.

in Abb. 6.9 (links) – in einen instabil periodischen und einen instabil stationären Ast. Letzterer wird problemlos mit der maximalen Verfolgungsschrittweite bis $v \approx 71.3 \text{ m/s}$ fortgesetzt; dieser Ast wird, wie der gesamte instabil periodische Ast, nicht weiter verfolgt.

Auch jetzt wird wieder zur Bestimmung des stabil periodischen Astes von einem bei $v = 45.0 \text{ m/s}$ extern berechneten Lösungspunkt auf diesem Ast ausgegangen. Bevor in Richtung abnehmender Geschwindigkeiten die Sattelpunktverzweigung ∇ explizit detektiert werden kann, bricht der Verfolgungsalgorithmus aufgrund von Konvergenzproblemen der Korrektoriteration nach einer Reihe von Schrittweitenreduktionen ab. Da jedoch die zuletzt berechnete periodische Lösung mit einem kritischen Eigenwert $\mu_{\text{krit}} = 0.9957$ einen Sattelpunkt andeutet, kann die diesem Grenzzyklus zugrunde liegende Fahrgeschwindigkeit durchaus als nichtlineare Grenzgeschwindigkeit angesehen werden, es folgt also $v_{\text{nl}} \approx 37.30 \text{ m/s}$. Für die Verkleinerung der Schrittweite und den Abbruch der Fortsetzung in der Umgebung der Sattelpunktverzweigung sind im Wesentlichen zwei Gründe zu nennen: Die Iterationsmatrix der Korrektoriteration im Verzweigungspunkt ist singular (aus diesem Grund wird auch nach dem Auffinden einer Verzweigung in einem bestimmten Parameterbereich der Verzweigungspunkt mittels einer Regula-falsi-Iteration der Testfunktion (3.10) näher lokalisiert, siehe dazu Abschnitt 3.2.4) und die Monodromiematrix weist einen zweifachen 1.0-Eigenwert auf. Prinzipiell kann der Verfolgungsalgorithmus durchaus eine solche Sattelpunktverzweigung lokalisieren und auch den periodischen Ast darüber hinaus weiter verfolgen. Der Abbruch der Verfolgung dürfte hier auf eine nicht ausreichende Glattheit der Lösung zurückzuführen sein. Verdeutlicht werden diese Konvergenzprobleme auch durch relativ große Fehler bei der Bestimmung der Testfunktion (4.25) der Monodromiematrix in diesem Bereich des Verzweigungsdiagramms von $0.02 < \min_i |\text{Re}(\mu_i) - 1.0| < 0.04$, $i = 1, \dots, n_z$, siehe Abb. 6.8 (rechts).

Der Teil 2 des periodischen Astes wird ausgehend von $v = 45.0 \text{ m/s}$ in Richtung zunehmender Parameterwerte fortgesetzt. Ab einer Geschwindigkeit $v \approx 52.3 \text{ m/s}$ tritt an den Radsätzen bei einer maximalen Querauslenkung von $y_{\text{RS,max}} \approx 6.0 \text{ mm}$ Spurkranzkontakt auf, erkennbar auch daran, dass bei weiter steigenden Geschwindigkeiten $y_{\text{RS,max}}$ nur noch

äußerst schwach ansteigt. Der zuletzt berechnete Lösungspunkt auf dem Ast wird bei der Geschwindigkeit $v = 80.53 \text{ m/s}$ und einer maximalen Querauslenkung von $y_{\text{RS}} = 6.28 \text{ mm}$ erreicht. Bei der nächst höheren Geschwindigkeit bricht das Integrationsverfahren mit dem Hinweis auf Radanheben ab, übertragen auf das reale Fahrzeug wird damit die Gefahr einer Entgleisung angedeutet. Insgesamt gesehen wird durch diese Untersuchung die in Abschnitt 3.1.2 vorgestellte prinzipielle Form der Verzweigungsdiagramme von Schienenfahrzeugen bestätigt.

Numerische Untersuchungen anhand des Standardmodells

Eine erste Untersuchungsreihe hat zum Ziel, den Einfluss der Integrationstoleranzen $ATOL/RTOL$ sowie der Genauigkeit $NTOL$ der inversen Abbildung (5.18) auf die Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t)$ (4.23) bzw. $\tilde{\mathbf{S}}(t)$ (5.53) und damit auch auf die Monodromiematrix $\mathbf{M} = \mathbf{S}(t = T_p)$ (3.8) bzw. $\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{S}}(t = T_p)$ (5.54) festzustellen. Da die Eigenwerte der Monodromiematrix die Beurteilung der Stabilität einer periodischen Lösung ermöglichen, wird als charakterisierende Vergleichsgröße der maximale Eigenwert von $\mathbf{S}(t = T_{\text{sim}})$ in der Nähe einer periodischen Lösung herangezogen (dieser weist keinen imaginären Anteil auf). Grundlage der Untersuchung ist das oben beschriebene Standardmodell des Personewagendrehgestells bei einer Fahrgeschwindigkeit von $v = 45.0 \text{ m/s}$. Diese garantiert die weitgehende Ausnutzung des Spurspiels und damit des Laufbereichs der Räder ohne auf einen Spurkranzkontakt zu führen. Die Integrationszeit beträgt $T_{\text{sim}} = 0.2305 \text{ s} \approx T_p$, der Verfolgungsalgorithmus bleibt hierbei ohne jeglichen Einfluss.

Das Ergebnis dieser vergleichenden Untersuchung bei einer Variation von $ATOL = RTOL \in [10^{-3}; 10^{-8}]$ sowie $NTOL \in [10^{-3}; 10^{-9}]$ zeigt Abb. 6.10 (links). Aufgetragen ist der relative Fehler $\varepsilon_{\mu_{\text{max}}}$ des betragsmaximalen Eigenwerts $\mu_{\text{max}}(ATOL, RTOL, NTOL)$ mit $\mu_{\text{max}} := \max_i |\mu_i|$, $i = 1, \dots, n_z$, bei $t = T_{\text{sim}}$:

$$\varepsilon_{\mu_{\text{max}}} := \frac{|\text{Re}(\hat{\mu}_{\text{max}}) - \text{Re}(\mu_{\text{max}})|}{\text{Re}(\hat{\mu}_{\text{max}})}. \quad (6.6)$$

Als Bezugsgröße dient der mit minimalen Fehlerschranken berechnete Eigenwert $\hat{\mu}_{\text{max}} := \mu_{\text{max}}(ATOL = RTOL = 10^{-8}, NTOL = 10^{-9})$. Zum Vergleich gibt Abb. 6.10 (rechts) den analog berechneten Fehler $\varepsilon_{y_{\text{RS1}}}$ in der Querverschiebung $y_{\text{RS1}}(t = T_{\text{sim}})$ des führenden Radsatzes wieder. Fehler $\varepsilon_{\mu_{\text{max}}} \geq 0.025$ sind nicht mehr dargestellt. Die Ergebnisdaten, die diesen beiden Abbildungen zugrunde liegen, sind im Anhang C in Tab. C.1 und C.2 tabelliert.

Als Bereich mit akzeptablen Fehlern $\varepsilon_{\mu_{\text{max}}}$ kann aus Abb. 6.10 $ATOL/RTOL \leq 10^{-5}$ und $NTOL \leq 10^{-6}$ abgelesen werden, dieser ist in Abb. 6.11 (links) nochmals vergrößert dargestellt. Insgesamt gesehen ist der Fehler in den Eigenwerten der Sensitivitätsmatrix deutlich größer als in den durch y_{RS1} repräsentierten Zustandsgrößen. Ein Umstand, der zumindest zum Teil auf die in Abschnitt 6.2.2 beschriebene Bestimmung der Anfangswerte der Sensitivitäten mittels finiter Differenzen zurückzuführen ist. Der Einfluss der Fehlerschranke $NTOL$ ist, wird ein Maximalwert $NTOL = 10^{-6}$ nicht überschritten, im Vergleich zu den Integrationstoleranzen eher gering – auch dies eine Auswirkung des Differenzenansatzes

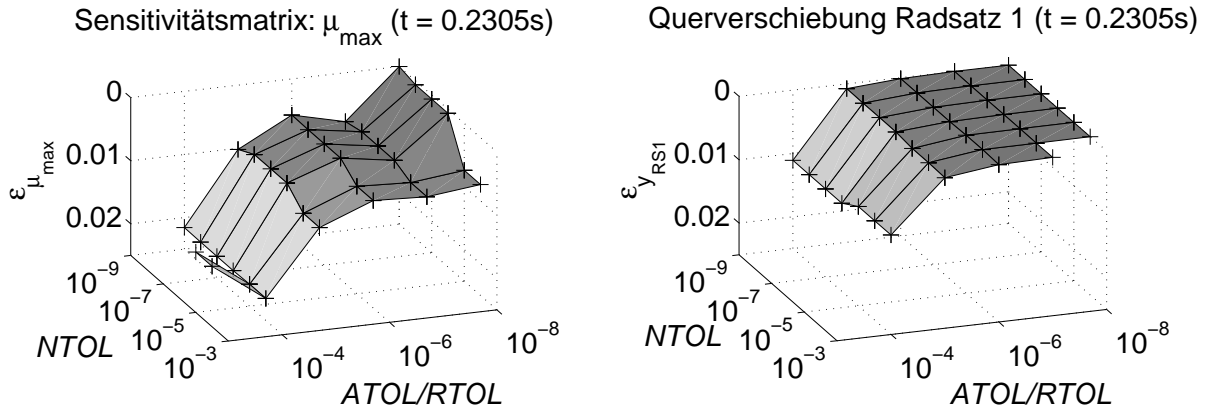


Abbildung 6.10: Drehgestell, Standardmodell: *Links* – relativer Fehler $\varepsilon_{\mu_{\max}}$ des betragsmaximalen Eigenwerts der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t=T_{\text{sim}})$. *Rechts* – relativer Fehler $\varepsilon_{y_{RS1}}$ der Querverschiebung des führenden Radsatzes. Die den Graphiken zugrunde liegenden Daten sind im Anhang C in Tab. C.1 und Tab. C.2 zusammengefasst.

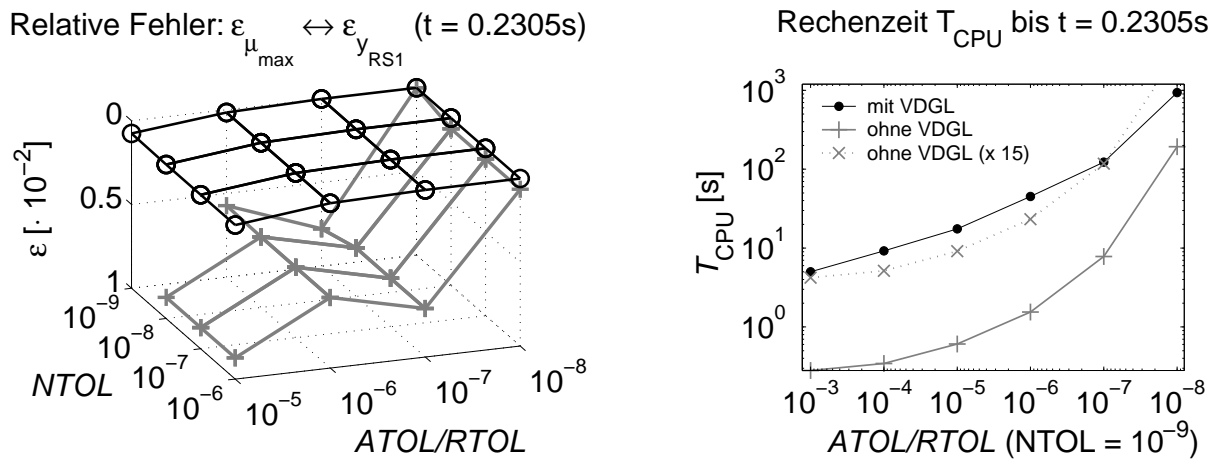


Abbildung 6.11: Drehgestell, Standardmodell: *Links* – relative Fehler $\varepsilon_{\mu_{\max}}$ und $\varepsilon_{y_{RS1}}$ des betragsmaximalen Eigenwerts der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t=T_{\text{sim}})$ (Symbol „+“) bzw. der Querverschiebung des führenden Radsatzes (Symbol „○“). *Rechts* – Gegenüberstellung der Rechenzeiten zur Integration der Bewegungsgleichungen mit und ohne Variationsdifferentialgleichungen (5.52).

zur Berechnung der Anfangssensitivitäten. Da andererseits aber $NTOL$ die Gesamtrechenzeit nur geringfügig beeinflusst, kann als Anhaltswert durchaus $NTOL=10^{-9}$ empfohlen werden. Bezüglich der Integrationsfehlerschranken $ATOL/RTOL$ ist eine solch einfache Aussage nicht zu treffen, da diese die Rechenzeit T_{CPU} , wie in Abb. 6.11 (rechts) gezeigt, sehr stark anheben können. Bei Integration allein der Bewegungsgleichungen wäre $ATOL/RTOL = 10^{-4}(10^{-5})$ vollkommen ausreichend. Auch wenn der Zusammenhang zwischen Fehlerschranke und resultierendem relativem Fehler der Testfunktion im Fall der VDGL nicht so ausgeprägt ist, stellt für dieses Simulationsbeispiel $ATOL/RTOL=10^{-6}$ einen befriedigenden Kompromiss zwischen relativem Fehler $\varepsilon_{\mu_{\max}}$ und Rechenzeit dar.

Der Vergleich der Rechenzeiten zur Integration der Bewegungsgleichungen mit (T_{CPU}^m) und ohne Variationsdifferentialgleichungen (T_{CPU}^o) in Abb. 6.11 (rechts) unterstreicht die Bedeutung der in Abschnitt 4.3.4 beschriebenen rechenzeitoptimierten Auswertung der VDGL. Die mit „x“ gekennzeichnete Kurve stellt dazu eine grobe Abschätzung der Rechenzeit bei herkömmlicher Integration des Gesamtsystems (nominelles System und VDGL) dar: $T_{\text{CPU}}^{n_z o} = (n_z + 1) \cdot T_{\text{CPU}}^o$. Da die Integration der VDGL die Auswertung der Jacobimatrix der Integration in jedem Schritt erfordert – bei der Integration allein des nominellen Systems wird nur bei Bedarf eine neue Jacobimatrix ausgewertet – ergibt sich $T_{\text{CPU}}^m > T_{\text{CPU}}^{n_z o}$ für größeres $ATOL/RTOL$. Mit sinkenden Integrationstoleranzen steigt aber die Anzahl der Jacobimatrixauswertungen zur Integration des nominellen Systems an, so dass ab $ATOL/RTOL \approx 10^{-7}$ sogar $T_{\text{CPU}}^m < T_{\text{CPU}}^{n_z o}$ erreicht wird.

In einer zweiten Untersuchungsreihe soll der Einfluss der geforderten Genauigkeit $EPSZ$ einer periodischen Lösung und der Toleranzen $ATOL/RTOL/NTOL$ auf die Floquet–Multiplikatoren $\mu_i, i = 1, \dots, n_z$ aufgezeigt werden. Dabei ist der zulässige Fehler bei der direkten Bestimmung einer periodischen Lösung über Gleichung (4.11)/(5.48) als

$$\|\mathbf{Q}(\mathbf{z}_0)\| \leq EPSZ \quad (6.7)$$

definiert. Als Grundlage dient wiederum das für die vorangegangene Untersuchung verwendete Standardmodell, allerdings wird jetzt zunächst eine die Forderung (6.7) erfüllende periodische Lösung berechnet. Zur Beurteilung der zugehörigen Floquet–Multiplikatoren wird dann die Testfunktion (4.25) des 1.0–Eigenwerts der Monodromiematrix herangezogen,

$$\mu_{1,0} := \min_i |\operatorname{Re}(\mu_i) - 1.0| \stackrel{!}{=} 0 \wedge \operatorname{Im}(\mu_i) \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 1, \dots, n_z. \quad (6.8)$$

Im Rahmen der numerischen Berechnungen wird diese Forderung mittels des Verfahrensparameters $EPSL$ auf $\mu_{1,0} \leq EPSL$ ($= \varepsilon_{\mu,r}$, siehe (4.25) sowie Anhang A) abgeschwächt; in den folgenden Untersuchungen ist mit $EPSL=0.5$ dieser Test allerdings nahezu ausgeschaltet. Die Integrationstoleranzen sind stets mit $ATOL = RTOL = 0.1 \cdot EPSZ$ festgelegt ($ATOL = RTOL \geq EPSZ$ ist sinnlos), weiter gilt $EPSR=10^{-7}$ und die Startschrittweite der Verfolgung ist zu $h^0 = 0.05$ festgelegt. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in den Schaubildern von Abb. 6.12 sowie in den beiden Tabellen C.3 und C.4 im Anhang C aufgezeigt, und zwar für die ersten beiden Schritte einer Pfadverfolgung ($ISTEP=0$ und $ISTEP=1$); Werte $\mu_{1,0} > 0.04$ sind in den Graphiken nicht mehr dargestellt.

Auch aus dieser Untersuchung können wieder Maximalwerte der variierten Toleranzen für das Simulationsmodell abgelesen werden: Wird die Grenze mit $\mu_{1,0} < 0.01$ festgelegt, folgt zusammengefasst als akzeptabler Bereich $EPSZ \leq 10^{-4}$ und $NTOL \leq 10^{-6}$. Dabei wird die Tendenz bestätigt, dass bei Unterschreiten einer gewissen Schwelle von $NTOL$ dieser Parameter die Testfunktion nur noch schwach beeinflusst; selbst $NTOL < 10^{-9}$ bringt keine eindeutige Verbesserung, allerdings wächst dann die Gefahr von Konvergenzproblemen. Wird die vertikale Achse in Abb. 6.12 als relativer Fehler der Testfunktion interpretiert, erhält man die gleiche Größenordnung des Fehlers bei der Berechnung der Monodromiematrix \mathbf{M} wie in der vorhergegangenen Untersuchung zur Berechnung der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t)$. Daraus folgt, dass weder der Iterationsalgorithmus zur Bestimmung der Rückkehrzeit in die Poincaré–Ebene durch Auswertung der Testfunktion (4.16)

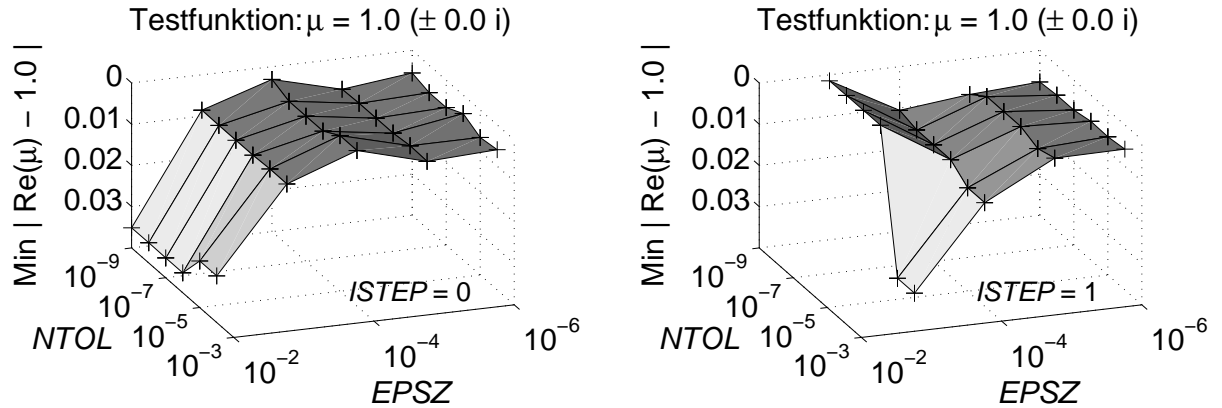


Abbildung 6.12: Drehgestell, Standardmodell: Auswertung der Testfunktion (6.8) des 1.0–Eigenwerts der Monodromiematrix. *Links* – $ISTEP=0$: Periodische Lösung ausgehend von dem nutzerdefinierten Startwert. *Rechts* – $ISTEP=1$: Periodische Lösung nach dem ersten Fortsetzungsschritt (Zahlenwerte: Tab. C.3 bzw. C.4 im Anhang C).

noch derjenige zur direkten Berechnung eines Punktes auf einer periodischen Trajektorie durch Auswertung von (6.7) wesentlich die Genauigkeit der Floquet–Multiplikatoren beeinträchtigt.

Als Fazit der vorgestellten Untersuchungen sowie als Erfahrungswert aus einer Vielzahl vergleichbarer Verzweigungsanalysen kann die folgende generelle Empfehlung zur Auswahl der involvierten Verfahrensparameter getroffen werden: Die Parameterkombination

$$NTOL = 10^{-9}, \quad 10^{-5} \leq EPSZ \leq 10^{-4}, \quad 10^{-6} \leq ATOL/RTOL \leq 10^{-5}$$

stellt bei der Anwendung der Verfolgungsalgorithmen auf Simulationsmodelle von Schienenfahrzeugen eine oftmals geeignete Ausgangsbasis dar. Darauf aufbauend kann dann bei Bedarf noch eine iterative Feinabstimmung in Kombination mit der Schranke $EPSL$ erfolgen. Die Verfolgung stationärer Lösungen erweist sich hingegen in der Regel als unkritisch, eine oftmals geeignete Parameterkombination kann Tab. 6.3 entnommen werden.

Verzweigungsanalyse des Originalmodells mit Kegel– auf Kreisprofilen

Um die Ergebnisse einer Verzweigungsanalyse des hier untersuchten Drehgestells mit entsprechenden Ergebnissen aus der Literatur vergleichen zu können, ist das Standardmodell auf das in [Kaas-Petersen86] beschriebene Originalmodell zurückzuführen. Die Unterschiede dieser beiden Modellierungen beschränken sich dabei auf die Beschreibung des Kontakts zwischen Rad und Schiene sowie die spezifischen Rad–Schiene–Parameter. Letztere sind in Anhang B.2 gesondert aufgeführt, die ebendort zusammengefasste Geometrie, Massengeometrie sowie die Daten der Aufhängung bleiben unberührt. Die Struktur der Bewegungsgleichungen, und hierbei insbesondere die Formulierung eines kinematischen Zwangs zwischen Rad und Schiene auf der Grundlage entsprechender Nebenbedingungen, wird vom Standardmodell übernommen. Allerdings vermeidet das kegelige Radprofil die in Abschnitt 2.1.4 beschriebenen Kontaktpunktsprünge der Verschleißprofile, demnach kann

das quasi-elastische Kontaktmodell durch die einfachere „starre“ Kontaktbedingung (2.4) ersetzt werden.

Grundlage des Originalmodells sind kegelige Radprofile der Konizität (Kegelwinkel, siehe Abb. 2.7 auf S. 23) $\delta_0 = 0.05$ in Kombination mit kreisförmigen Schienenkopffprofilen mit Radius $R_S = 0.21$ m. Diese Profilkombination kam bereits auch im Rahmen der Voruntersuchungen zum Grenzzyklusverhalten eines Einzelradsatzes in Abschnitt 2.1.5 zur Anwendung. Die beschränkende Wirkung des Spurkranzes üblicher Profilpaarungen – dokumentiert bereits in den Abb. 2.8, 2.9 auf S. 25 – wird mit Hilfe eines spielbehafteten, linearelastischen Anschlags mit hoher Steifigkeit $c_F = 1.46 \cdot 10^7$ N/m nachgebildet. Der Anschlag wirkt mittig zwischen dem Führkörper und dem Radsatzschwerpunkt und erzeugt ausschließlich Querkkräfte in y -Richtung. Sei y_{RS} die Querverschiebung eines Radsatzes bezüglich der Gleismittellinie und $\delta_F = 0.0091$ m das wirksame Spiel, dann ergibt sich die Flankenkraft F_F auf den Radsatz zu

$$F_F(y_{RS}) = \begin{cases} -c_F (y_{RS} - \delta_F) & \text{für } \delta_F < y_{RS} , \\ 0 & \text{für } -\delta_F \leq y_{RS} \leq \delta_F , \\ -c_F (y_{RS} + \delta_F) & \text{für } y_{RS} < -\delta_F . \end{cases} \quad (6.9)$$

Die Schlupfkkräfte folgen in [Kaas-Petersen86] aus der Theorie von VERMEULEN und JOHNSON, [VermeulenJohnson64], wobei eine konstante Vertikalkraft $F_N = 66670$ N im Kontaktpunkt (Radaufstandskraft) angenommen wird. Daneben wird dort auch der Angriffspunkt der Schlupfkkräfte auf den Rädern mit der Querlage $y_K = 0.716$ m bezüglich des Radsatzschwerpunktes als konstant vorausgesetzt. Die beiden letzteren Annahmen werden hier nicht nachvollzogen, zur realitätsnahen Berechnung der Normalkräfte und der Kontaktpunktlage sei auf Abschnitt 2.1.4 und insbesondere [Netter98] verwiesen. Die Berechnung der Schlupfkkräfte erfolgt nach [ShenHedrickElkins84], einer Erweiterung der Theorie von VERMEULEN und JOHNSON, die zusätzlich den Spin zwischen den Kontaktpartnern mit einbezieht².

Die laterale Schieneneinbaulage $r_y = 0.7265$ m (d.h. der Abstand von der Gleismitte zum Scheitelpunkt des Gleisprofils) sowie den Radstand $r_s = 0.716$ m erhält man aus der Forderung, dass sich bei zentrischer Radsatzlage im Gleis ebenfalls eine laterale Kontaktpunktlage $y_K = 0.716$ m bzgl. des Radsatzschwerpunktes einstellt. Gleichzeitig soll dabei der aktuelle Rollradius im Kontaktpunkt dem nominellen Radradius entsprechen.

Die Verzweigungsanalyse wird auch hier wieder in mehreren Abschnitten durchgeführt, es zeigt sich, dass dieses Modell ein reichhaltiges dynamisches Verhalten aufweist. Die Ergebnisse der Pfadverfolgung der einzelnen Lösungszüge im Zustands-Parameter-Raum sind in dem Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.13 (links) zusammengefasst. Die jeweils verwendeten Einstellungen der Verfahrensparameter können Tab. 6.4 entnommen werden. Die zur Stabilitätsbewertung erforderlichen Eigenwerte zeigen die beiden Graphiken

²Die Schlupfkraftberechnung nach [ShenHedrickElkins84] stellt eine Kombination der linearen Theorie von KALKER und der in [VermeulenJohnson64] eingeführten nichtlinearen Theorie dar: Die linearen Schlupfkkräfte gemäß Gleichung (2.7) werden einer kubischen Sättigungsfunktion unterzogen. Die Theorie von VERMEULEN und JOHNSON vernachlässigt zwar den Einfluss des Spins, in [Netter98, S. 64] wird jedoch begründet, dass dieser Einfluss im Falle kegeliger Radprofile aufgrund kleiner Kontaktwinkel ebenfalls klein ist.

in Abb. 6.14, links für die stationären Lösungen (im Verzweigungsdiagramm erkenntlich an der zentrischen Radsatzlage $y_{RS2} = 0$) und rechts für die periodischen Trajektorien ($\max_{0 \leq t \leq T_P} y_{RS2} \neq 0$). Die Qualität der Stabilitätsanalyse der periodischen Trajektorien kann anhand der in Abb. 6.13 (rechts) dargestellten Testfunktion (4.25) des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix beurteilt werden. Es sei angemerkt, dass die im Folgenden beschriebenen Untersuchungen und damit auch das Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.13 keineswegs alle Attraktoren im gegebenen Parameterbereich abdecken (dies ist auch nicht Ziel dieser Arbeit). Eine umfassendere Übersicht über weitere koexistierende Lösungen – unsymmetrisch periodische, quasi-periodische, chaotische etc. – wird in [True92] gegeben.

<i>Parameter</i>	<i>TOL</i>	<i>NTOL</i>	<i>EPSR</i>	<i>EPSZ</i>	<i>EPSL</i>	<i>EPSC</i>	<i>HMAX</i>
stationär	–	10^{-9}	–	10^{-8}	–	10^{-5}	4.0
periodisch 1	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-4}	0.02	10^{-7}	1.0
periodisch 2	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-4}	0.04	10^{-7}	1.0
periodisch 3	10^{-6}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-4}	0.04	10^{-5}	1.0

Tabelle 6.4: Drehgestell, Originalmodell: Einstellung der Verfahrensparameter zur Verfolgung stationärer bzw. periodischer Attraktoren.

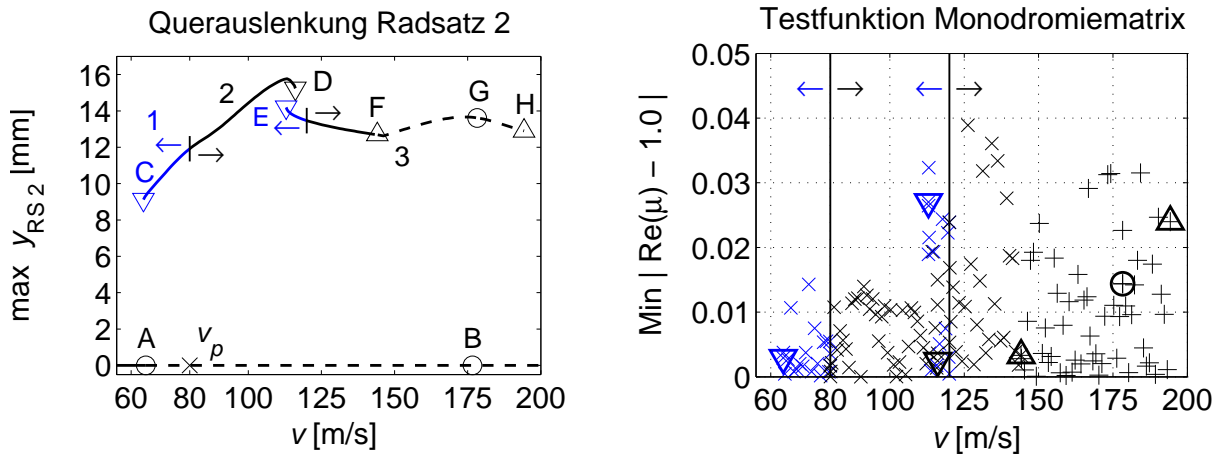


Abbildung 6.13: Drehgestell, Originalmodell: *Links* – Numerisch berechnetes Verzweigungsdiagramm mit lokalisierten Verzweigungspunkten. *Rechts* – Testfunktion (4.25) für den Realteil des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix.

Die Verfolgung des stabil stationären Astes ergibt die erwartete Hopfverzweigung bei einer linearen Grenzggeschwindigkeit von $v_{lin} = v_A = 65.02$ m/s (die Fahrgeschwindigkeiten an den einzelnen Verzweigungspunkten sind in Tab. 6.5 Spalte 2 zusammengefasst, die Bezeichnungen der einzelnen Verzweigungen/Astabschnitte beziehen sich darin auf das Verzweigungsdiagramm in Abb. 6.13). Bei der Geschwindigkeit v_B quert ein weiteres

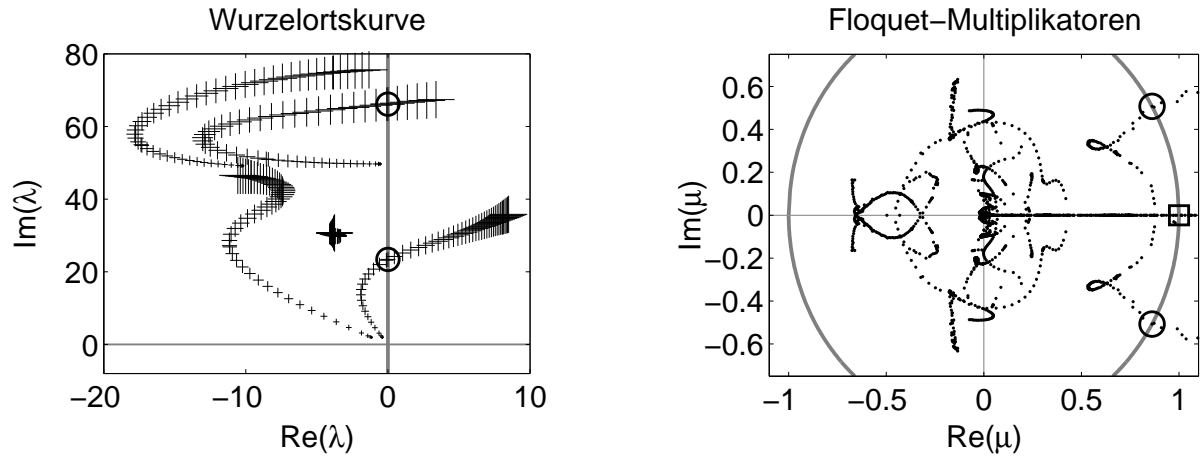


Abbildung 6.14: Drehgestell, Originalmodell: Stabilitätsanalyse zu dem Verzweigungsdiagramm aus Abb. 6.13. Floquet-Multiplikatoren $\mu = 1.0 \pm 0.0i$ charakterisieren sowohl Sattelpunkt- als auch Gabelverzweigungen und sind zusammenfassend mit \square gekennzeichnet.

Eigenwertpaar die imaginäre Achse und zeigt damit eine weitere Hopfverzweigung an. Die beiden instabil periodischen Äste, die von den Hopfverzweigungen A bzw. B ausgehen, werden nicht verfolgt.

Ausgehend von der periodischen Lösung bei $v = v_p = 80.0 \text{ m/s}$ wird der Ast 1 in Richtung abnehmender Geschwindigkeiten verfolgt. Zwar kann aufgrund eines vorhergehenden Programmabbruchs die Sattelpunktverzweigung nicht explizit lokalisiert werden, die dort geltende nichtlineare Grenzgeschwindigkeit wird jedoch auf den engen Bereich $v_{\text{nl}} = v_c \in [64.18 \text{ m/s } 64.20 \text{ m/s}]$ eingeschränkt. Dabei beträgt die maximale Querverschiebung $y_{\text{RS}} \approx 0.0091 \text{ m} = \delta_F$, der Radsatz befindet sich also im Bereich des Flankenanslaufs und damit in der Nähe der durch die Flankenkraft (6.9) verursachten Unstetigkeitsstelle in den Ableitungen. Dadurch genügen die Bewegungsgleichungen lokal nicht mehr den Glätteanforderungen des Verfolgungsalgorithmus und der Abbruch der Fortsetzung wird nachvollziehbar.

In Richtung aufsteigender Geschwindigkeiten und ausgehend wieder von dem periodischen Attraktor bei $v = 80.0 \text{ m/s}$ verzweigt der Abschnitt 2 in einer Sattelpunktverzweigung D. Analoges Vorgehen erzeugt den Ast 3 mit einer weiteren Sattelpunktverzweigung E. Dieser stabil periodische Ast endet in einer (vermuteten) Gabelverzweigung F, weiterverfolgt wird nur der entstehende instabil periodische Ast, gekennzeichnet durch einen Floquet-Multiplikator außerhalb des Einheitskreises der komplexen Ebene. In G quert ein imaginäres Paar von Floquet-Multiplikatoren den Einheitskreis und markiert damit eine verallgemeinerte Hopfverzweigung (Neimarkverzweigung) in einen quasi-periodischen Ast (siehe auch Abschnitt 3.2.4). Der instabil periodische Ast wird in der Verzweigung H dann wieder stabil.

Der Verlauf eines Grenzzyklus inklusive eines ausgeprägten transienten Verhaltens ist beispielhaft bei einer Fahrgeschwindigkeit $v = v_p = 80.0 \text{ m/s}$ in Abb. 6.15 dargestellt. Der Startpunkt der Integration ist dabei sehr nahe der instabil stationären Lösung gewählt,

siehe auch Abb. 6.13, links: Allein der führende Radsatz wird mit $y_{RS1}(t=0) = 0.1 \text{ mm}$ geringfügig aus der zentrischen Lage ausgelenkt. Die Wirkung des als steifer Anschlag modellierten Flanken-anlaufes eines Radsatzes bei $|y_{RS}| > 0.0091 \text{ m} = \delta_F$, siehe Gleichung (6.9), wird durch die symmetrischen „Ecken“ des Phasenporträts sehr deutlich wiedergegeben; man vergleiche auch mit Abb. 2.9 auf S. 25. Startet die Integration dagegen exakt auf dem instabil stationären Lösungsast, bleibt das stationäre Verhalten erhalten, d.h. es stellt sich keinerlei Relativbewegung des Fahrzeuges zum Gleis ein (in Abb. 6.15 nicht dargestellt).

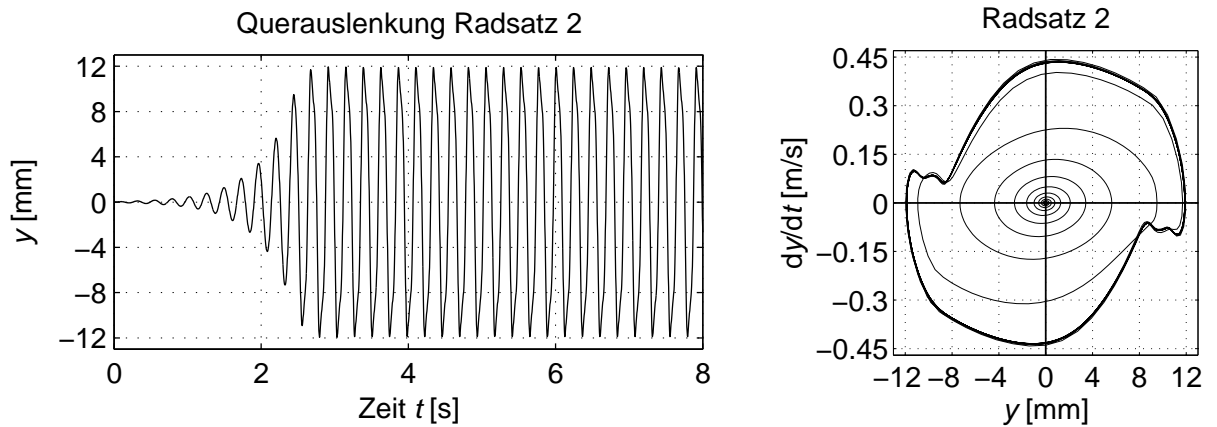


Abbildung 6.15: Drehgestell, Originalmodell: Querauslenkung des nachlaufenden Radsatzes und zugehöriges Phasenportrait bei einer Fahrgeschwindigkeit $v_p = 80.0 \text{ m/s}$.

Zum Vergleich der Verzweigungsanalyse des Originalmodells mit entsprechenden Untersuchungen aus der Literatur sind insbesondere die Werte des Verzweigungsparameters Fahrgeschwindigkeit an den Verzweigungen geeignet. Diese sind in Tab. 6.5 einander gegenübergestellt, wobei Spalte 2 sich auf die in den Abb. 6.13 und 6.14 zusammengefassten Ergebnisse bezieht. Die Daten der anderen Spalten sind mit teilweise unterschiedlichen numerischen Methoden erzeugt, die zugrunde liegenden Untersuchungen basieren jedoch alle auf dem in [Kaas-Petersen86] beschriebenen Simulationsmodell des Drehgestells.

In Anbetracht der oben beschriebenen Unterschiede in der Modellierung des Originalmodells zu der Beschreibung in [Kaas-Petersen86] sind die Unterschiede in den Fahrgeschwindigkeiten der Verzweigungspunkte A – E als sehr gering einzustufen. Eine Ausnahme stellt die Hopfverzweigung A dar, die in [Hassard00] ausführlich untersucht wird. Eine gleichwertige Übereinstimmung ist auch (im Rahmen der Ablesegenauigkeit) in den maximalen Querverschiebungen festzustellen. Die Lücke D – E im Verzweigungsdiagramm ist ein Bereich hochgradig komplexen dynamischen Verhaltens und weist mehrere koexistierende Attraktoren auf, [JensenTrue97]. Der Lösungsast 3 findet hingegen in [True92] keine direkte Entsprechung, dort werden dafür zwei größtenteils stabil periodische, asymmetrische Lösungsäste (mit bezüglich der Gleismittellinie symmetrischen neutralen Linien) bis hin zu hohen Geschwindigkeiten $v > 200 \text{ m/s}$ diagnostiziert. Eine genauere Untersuchung

Verzweigung	Quelle (v in [m/s])					Klassifizierung
	Abb. 6.13	①	②	③	④	
A	65.0	66.7	65.4	65.4	68.6	Hopf (v_{lin})
B	176.4		176.0			Hopf
C	64.2	65.4	63.6	63.6		Sattelp. (v_{lin})
D	116.8	113.9	114.6	114.6		Sattelpunkt
E	113.0	112.2	112.7	112.7		Sattelpunkt
F	144.3			147.5		Gabel (?)
G	178.2					Hopf
H	194.3					Gabel (?)
① → [Kaas-Petersen86] ② → [True92] ③ → [GalvanettoBriseghellaBishop97] ④ → [Hassard00]						

Tabelle 6.5: Zusammenstellung und Klassifizierung der Verzweigungspunkte für das Originalmodell sowie Vergleich der jeweiligen Parameterwerte mit entsprechenden Ergebnissen aus der Literatur.

des instabilen Astes im Bereich $v_F < v < v_G$ legt jedoch die Vermutung nahe, dass beide Erkenntnisse richtig sind und in diesem Parameterbereich die jeweils zwei asymmetrisch periodischen Attraktoren gemeinsam mit den stabilen/instabilen (symmetrischen) Grenzzyklen des Lösungsastes 3 koexistieren. Diese Vermutung wird durch die Ausführungen in [GalvanettoBriseghellaBishop97] gestützt.

Die im Zuge der vorgestellten Untersuchungen erzielten Erfahrungen in der Anwendung der Verzweigungsanalyse, insbesondere bezüglich der Einstellung der Verfahrensparameter der Verzweigungsalgorithmen, erlauben nun deren Anwendung auf detaillierte und damit komplexere Simulationsmodelle vollständiger Schienenfahrzeuge, beschrieben im nachfolgenden Kapitel. Durch den Vergleich der Ergebnisse mit analytischen Berechnungen bzw. mit vergleichbaren Untersuchungen anderer Autoren wurde das in Kap. 4 und 5 entwickelte Verfahren gemeinsam mit seiner Umsetzung in Programmcode partiell verifiziert.

Kapitel 7

Anwendung auf das Modell eines Reisezugwagens

Die Anwendung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und in den vorangehenden Kapiteln dargelegten Methoden zur automatisierten rechnergestützten Verzweigungsanalyse auf das komplexe Simulationsmodell eines Reisezugwagens ist Thema dieses Kapitels. Das Simulationsmodell entspricht dabei im Wesentlichen einer Modellierung, die ebenso auch zu einer umfassenden Analyse der Laufdynamik des Fahrzeuges geeignet wäre, beispielsweise durch Anwendung der in Abschnitt 2.2 aufgeführten Berechnungsverfahren. Neben den Nichtlinearitäten aus Kontaktgeometrie und –mechanik der Schnittstelle Rad–Schiene, die unter anderem auf die Verwendung der Verschleißprofilpaarung *S1002/UIC60–ORE* zurückzuführen sind, weisen auch die Kraftelemente der Primär- und Sekundäraufhängungen teilweise nichtlineare Kennlinien auf.

7.1 Simulationsmodell

Das untersuchte Simulationsmodell entstammt einer Benchmark–Definition des *European Rail Research Institute* (ERRI) und ist im Anhang 1 des Berichts [ERRI93] niedergelegt. Es repräsentiert einen *Avmz*–Personenwagen der ersten Klasse, ausgerüstet mit Fiat–Drehgestellen des Typs 0270. Nachstehende Modellbeschreibung folgt weitgehend diesem Bericht, die Modelldaten sind im Anhang B.3 zusammengefasst.

7.1.1 Modellbeschreibung

Das Simulationsmodell des *Avmz*–Reisezugwagens ist als Momentaufnahme einer Animationssequenz gemeinsam mit den aus der spezifischen Modellierung als MKS resultierenden Systemdimensionen in Abb. 7.1 dargestellt. Die Gesamtmasse des Fahrzeuges ist in insgesamt 15 Starrkörpern konzentriert, die untereinander und gegenüber dem Inertialsystem durch Kraftelemente und Gelenke verkoppelt sind. Die Gesamtzahl von 15 Starrkörpern

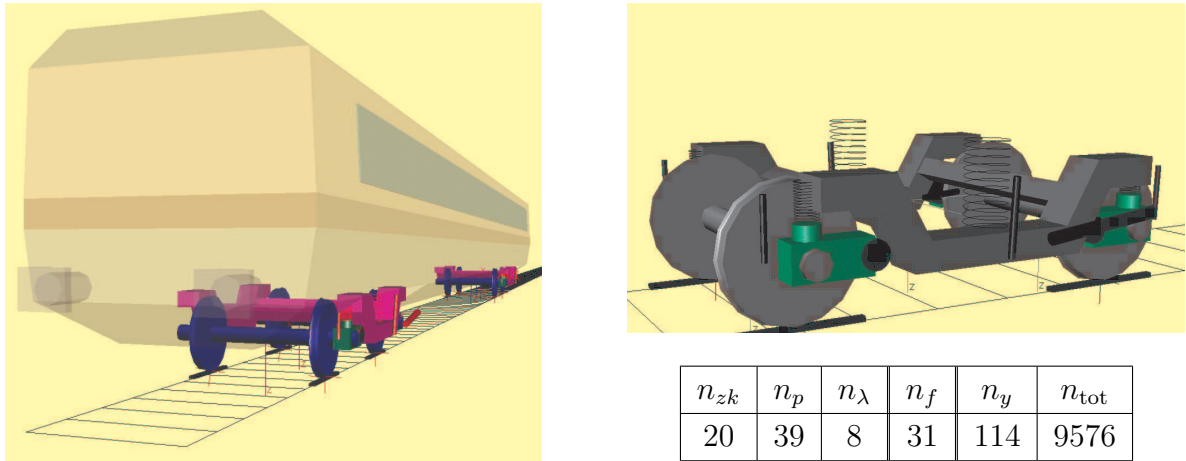


Abbildung 7.1: Simulationsmodell des *Avmz*-Reisezugwagens (*links*: Gesamtansicht, *rechts*: Drehgestell mit Primär- und Sekundäraufhängung) sowie Übersicht über die modellierungsabhängigen Systemdimensionen.

ergibt sich aus einem Wagenkasten, zwei Drehgestellen mit je zwei Radsätzen sowie einem links- und einem rechtsseitigen Achslenker je Radsatz.

Die Primäraufhängung zwischen Radsatz und Drehgestell wird jeweils von 2 Flexi-coilfedern gebildet, denen ein Dämpfer nahezu parallel geschaltet ist. Die Kraft-Weg-Charakteristik der Federn ist für jede Achsrichtung mit einer linearen Kennlinie angenähert, daneben gilt es aber auch noch, die Biegesteifigkeit der Federn bezüglich der x - und y -Achse zu berücksichtigen. Die allein in Einbaurichtung wirkenden Dämpferelemente zeigen dagegen einen nur stückweise linearen, symmetrischen Kraft-Geschwindigkeits-Zusammenhang, der noch von einer seriellen Steifigkeit überlagert ist. Letztere bildet die Steifigkeiten der radsatz- wie auch der drehgestellseitigen Anschlussbuchsen nach und bedingt die Verwendung von Krafterelementen mit Eigendynamik.

Die Sekundäraufhängung zwischen Drehgestellen und Wagenkasten ist auf ähnliche Weise realisiert: Insgesamt 2x2 Spiralfederelemente mit linearer Kennlinie und Biegesteifigkeit sowie dazu nahezu parallele Dämpferelemente mit stückweise linearer Kennlinie und serieller Steifigkeit. Vervollständigt wird die Sekundäraufhängung durch je 2 Schlinger-dämpfer pro Drehgestell, die der relativen Gierbewegung zwischen Drehgestell und Wagenkasten („schlingern“) entgegenwirken, sowie durch je 2 Querdämpfer. Auch deren Kraftwirkung wird durch einen linear-geknickten Kraft-Geschwindigkeits-Verlauf mit serieller Steifigkeit angenähert. Zusätzlich schränkt je ein harter, zentrischer Anschlag die Querbewegung des Wagenkastens gegenüber den Drehgestellen ein. Diese Anschläge sind als zweiseitig wirkende, symmetrische Federelemente mit Spiel nachgebildet.

Die Wiegenfeder ist im Modell auf eine Drehfeder wirkend um die longitudinale Achse direkt zwischen Drehgestell und Wagenkasten reduziert. Die Achslenker stützen sich über je ein ideal steifes Drehgelenk an den Radsätzen ab, die Steifigkeit der zugehörigen Lagerbuchsen am Drehgestell ergibt je ein dreidimensionales Federelement mit linearen Kennlinien bezüglich der Relativverschiebungen und der Relativverdrehungen.

7.1.2 Anmerkungen zur Modellierung

Die Umsetzung der obigen Modellbeschreibung in ein spezifisches Simulationsmodell erfolgt auf der Grundlage von SIMPACK und dessen internem Rad–Schiene–Modul. Die Starrkörper der Radsätze, der Drehgestelle und des Wagenkastens sind über spezielle Rad–Schiene–Gelenke direkt an das Inertialsystem gekoppelt, [Netter98, Int01]. Dabei werden diese Starrkörper mit der konstanten Geschwindigkeit $v =: p$, die auch hier wieder als Verzweigungsparameter Verwendung findet, entlang der ideal geraden, störungsfreien Trasse kinematisch geführt, die Eigendrehbewegung der Radsätze bleibt unberücksichtigt. Entsprechend der Beschreibung in Abschnitt 6.3 und Abb. 5.1 auf S. 99 verbleiben also je Radsatz die vier kleinen Relativbewegungen (y, z, φ, ψ) , wohingegen die Drehgestelle und der Wagenkasten noch einen zusätzlichen Nickfreiheitsgrad ϑ aufweisen. Die Beschreibung der Schnittstellen zwischen den Radsätzen und den Schienen erfolgt auf der Basis des in Abschnitt 2.1.4 dargelegten quasi-elastischen Kontakts und führt demnach zu Bewegungsgleichungen in der differentiell–algebraischen Formulierung (5.1). Nach Reduktion auf die in Kap. 5 beschriebene Zustandsform ③ verbleiben je Radsatz die beiden Minimalkoordinaten (y, ψ) .

Die Achslenker sind über je ein einfaches Drehgelenk mit einer Bewegungsmöglichkeit allein um die y –Achse an die Radsätze gekoppelt. Weitere Freiheitsgrade entstehen aus der Serienschaltung von Feder und Dämpfer zur Nachbildung der primären und sekundären Dämpferelemente; je Kraftelement ist eine zusätzliche Differentialgleichung erster Ordnung und damit auch eine zusätzliche Zustandskoordinate zu berücksichtigen.

Insgesamt erfordert die Zustandsbeschreibung des Modells also $n_p = 39$ Lagekoordinaten, die durch $n_\lambda = 8$ Zwangsbedingungen auf $n_f = 31$ verbleibende Lagefreiheitsgrade oder Minimalkoordinaten reduziert werden; selbiges gilt auch für die Geschwindigkeitskoordinaten. Daneben sind $n_{zk} = 20$ zusätzliche Zustandsgrößen zur Beschreibung der Eigendynamik aller Dämpferelemente erforderlich. Die Zustandsform zur Verzweigungsanalyse besteht folglich aus $2n_f + n_{zk} = 82$ Minimalkoordinaten. Die Darstellung der Bewegungsgleichungen in der GGL–Formulierung (5.7) führt hingegen auf einen Gesamtzustandsvektor des nominellen Systems der Länge $n_y = 2(n_p + n_\lambda) + n_{zk} = 114$. Bei synchroner Integration des nominellen Systems, der VDGL bezüglich der Anfangswerte der $2n_f$ Minimalkoordinaten und der Sensitivitätsgleichungen bezüglich des Verzweigungsparameters p ergibt sich eine Gesamtsystemdimension von $n_{\text{tot}} = (2n_f + n_{zk} + 2)n_y = 9576$. Zusammengefasst sind diese Systemdimensionen nochmals in Abb. 7.1.

Zur Berechnung der Schlupfkkräfte im Rad–Schiene Kontakt mit dem Programm FASTSIM wird eine konstante Rotationsgeschwindigkeit $\omega = -v/R_0$ der Radsätze um die Querachse angenommen, wobei R_0 den nominellen Radrollradius bezeichnet. Räder und Schienen sind mit der Verschleißprofilpaarung *S1002/UIC60–ORE* profiliert.

Abweichend von der Modellbeschreibung in [ERRI93] wird in den Lagerbuchsen der Achslenker an den Drehgestellen den dreidimensionalen Federelementen je ein ebenfalls dreidimensionales Dämpferelement parallel geschaltet. Ohne diese Zusatzdämpfung entstehen in den achsseitigen Drehgelenken der Achslenker insbesondere bei der Untersuchung des periodischen Fahrzeugverhaltens unkorrelierte hochfrequente Schwingungen, die eine automatisierte Analyse dieses Bewegungszustandes unmöglich machen. Auch in der Rea-

lität werden solche Schwingungen durch die omnipräsente Lager- und Werkstoffdämpfung eingeschränkt. Die entsprechenden Dämpferkoeffizienten in Anhang B.3 sind an die Modellierung der Achslenkerlager ähnlicher Fahrzeugtypen angelehnt.

7.2 Verzweigungs- und Stabilitätsanalyse

Wird das Simulationsmodell eines *Avmz*-Reisezugwagens einer Verzweigungsanalyse unterzogen, erhält man das in Abb. 7.2 dargestellte Verzweigungsdiagramm. Repräsentiert wird darin das Fahrzeugverhalten im eingeschwungenen Zustand in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit v – dem Verzweigungsparameter – durch die jeweiligen Maximalwerte der Querverschiebungen des führenden Radsatzes (links) und des Wagenkastens (rechts) relativ zur Gleismittellinie. Die Einstellungen der Verfahrensparameter zur Verfolgung der einzelnen Äste sind in Tab. 7.1 zusammengefasst und in Anhang A näher erläutert. Die Stabilität der stationären Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) kann anhand der Wurzelortskurve in Abb. 7.3 beurteilt werden, das rechte Schaubild zeigt zur Verdeutlichung der Hopfverzweigungen „○“ vergrößert die für eine Stabilitätsbetrachtung relevante engere Umgebung der imaginären Achse. Den Verlauf der Floquet-Multiplikatoren zur Beurteilung der Stabilität der Grenzzyklen zeigt Abb. 7.4 (links) auf, die Sattelpunktverzweigung des periodischen Lösungssastes ist darin mit „▽“ gekennzeichnet. Die Verlässlichkeit dieser Stabilitätsbeurteilung dokumentiert die Auswertung der Testfunktion für den 1.0-Eigenwert der Monodromiematrix in Abb. 7.4 (rechts).

<i>Parameter</i>	<i>TOL</i>	<i>NTOL</i>	<i>EPSR</i>	<i>EPSZ</i>	<i>EPSL</i>	<i>EPSG</i>	<i>HMAX</i>
stationär	–	10^{-9}	–	10^{-8}	–	10^{-5}	3.0
periodisch 1	10^{-5}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-4}	0.05	0.025	1.0
periodisch 2	10^{-5}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-4}	0.04	0.025	1.0

Tabelle 7.1: *Avmz*-Reisezugwagen: Einstellung der Verfahrensparameter zur Verfolgung stationärer bzw. periodischer Attraktoren.

Ebenso wie die Untersuchungen eines einzelnen Drehgestells in Abschnitt 6.4.3 führt eine Verzweigungsanalyse des *Avmz*-Reisezugwagens bezüglich der Fahrgeschwindigkeit auf den für Rad-Schiene-Systeme charakteristischen Verlauf des Verzweigungsdiagramms, prinzipiell erläutert bereits in Abschnitt 3.1.2. Die subkritische Hopfverzweigung wird bei der linearen Grenzgeschwindigkeit $v_{\text{lin}} = v_A = 101.62 \text{ m/s}$ mit hoher Genauigkeit ($EPSG = 10^{-5}$) bestimmt. Eine weitere Fortsetzung des instabil stationären Astes mit einer maximalen Verfolgungsschrittweite $HMAX = 3.0$ bis zu einem Maximum $v_{\text{max}} = 180 \text{ m/s}$ verläuft problemlos, für $v_B = 110.09 \text{ m/s}$ wird eine weitere Hopfverzweigung detektiert.

Zur Verfolgung der periodischen Attraktoren wird zunächst für $v = 130.0 \text{ m/s}$ ein Punkt in der Nähe einer periodischen Trajektorie mittels einer externen Zeitintegration bestimmt. Davon ausgehend ergibt sich in Richtung fallender Geschwindigkeiten die Sattelpunkt-

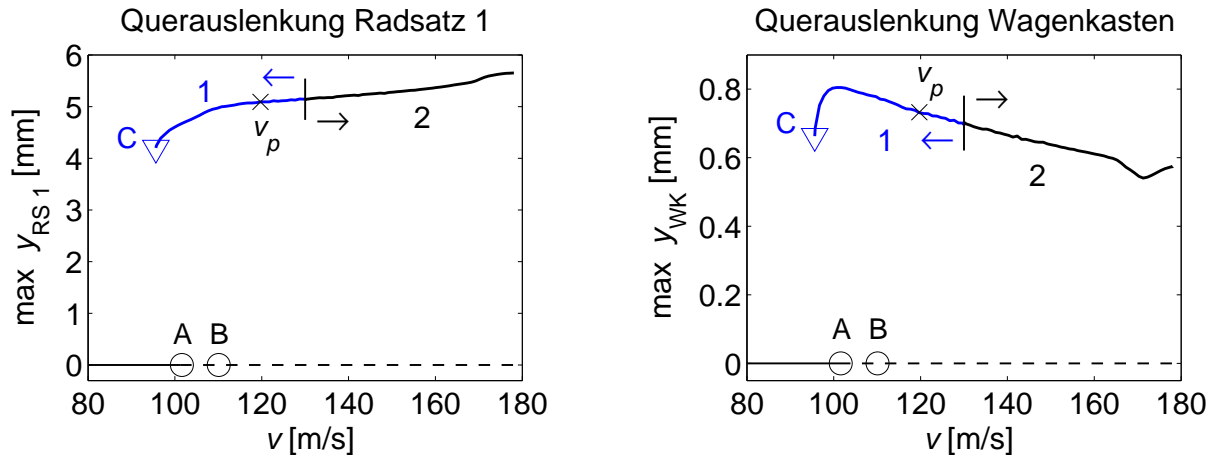


Abbildung 7.2: *Avmz*-Reisezugwagen: Numerisch berechnetes Verzweigungsdiagramm mit zwei Hopfverzweigungen und einer Sattelpunktverzweigung; alle Verzweigungen sind explizit lokalisiert.

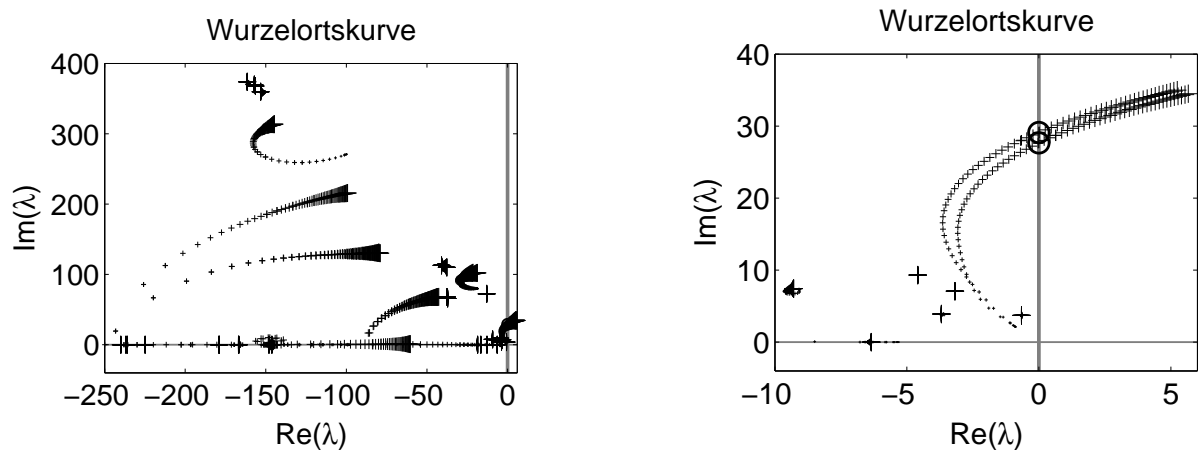


Abbildung 7.3: *Avmz*-Reisezugwagen: Wurzelortskurve zur Stabilitätsanalyse für das Verzweigungsdiagramm aus Abb. 7.2. Rechts: Vergrößerter Ausschnitt mit Hopfverzweigungen.

verzweigung bei der nichtlinearen Grenzgeschwindigkeit $v_{\text{lin}} = v_C = 95.62$ m/s. Allerdings gelingt die Lokalisierung des Sattelpunktes nur mit einer relativ groben (im Grunde aber durchaus ausreichenden) Genauigkeit $EPSG = 0.025$, der kritische Eigenwert beträgt dabei $\mu_{\text{krit}} = 1.004$.

In Richtung aufsteigender Geschwindigkeiten gelingt die Verfolgung der Grenzzyklen mit der maximalen Schrittweite $HMAX = 1.0$ bis in den Bereich $v \approx 177.0$ m/s. Im weiteren Verlauf wird die Verfolgungsschrittweite stark reduziert, bis die Verfolgung nach dem zuletzt berechneten Attraktor für $v = 178.05$ m/s bei einem kritischen Eigenwert $\mu_{\text{krit}} = 0.948$ abbricht. Der Verlauf des kritischen Eigenwertes legt eine Annäherung an eine weitere Sattelpunktverzweigung nahe, womit wieder die bereits für das Einzeldrehgestell in 6.4.3 diskutierten Probleme in einem solchen Fall zu gewärtigen sind: $\mu = 1.0$

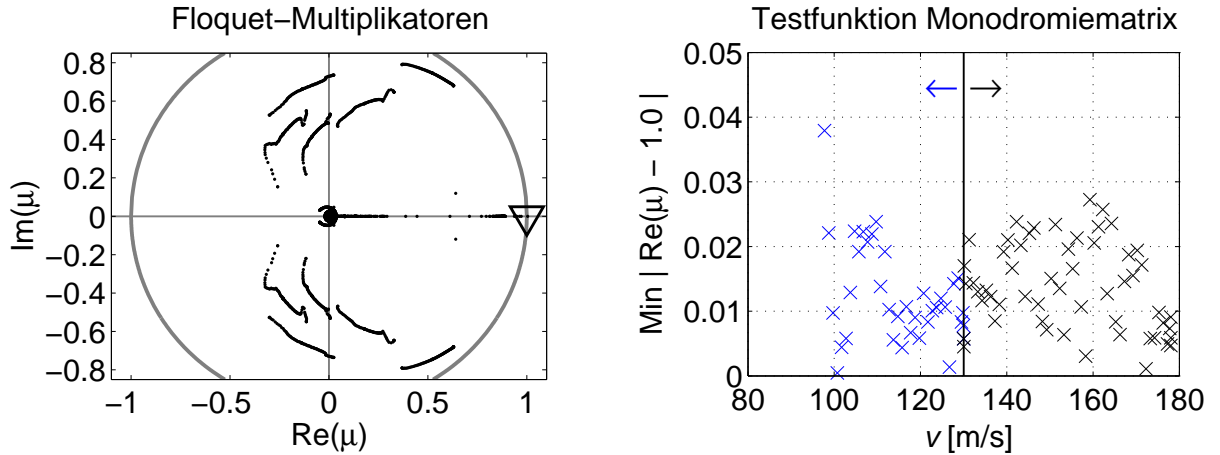


Abbildung 7.4: *Avmz*-Reisezugwagen: *Links* – Eigenwerte der Monodromiematrix (5.47) (Floquet-Multiplikatoren) zur Stabilitätsanalyse der periodischen Attraktoren für das Verzweigungsdiagramm in Abb. 7.2. *Rechts* – Testfunktion (4.25) für den Realteil des 1.0-Eigenwerts der Monodromiematrix; die zugehörigen Imaginärteile sind identisch Null.

ist ein zweifacher Eigenwert der Monodromiematrix und die Iterationsmatrix (5.50) ist im Verzweigungspunkt singulär. Allerdings ist die Genauigkeit der Testfunktion (4.25) der Monodromiematrix in diesem Geschwindigkeitsbereich relativ hoch. Daneben deutet die große Querauslenkung der Radsätze auf einen ausgeprägten Spurkranzkontakt hin. Die Verringerung der Verfolgungsschrittweite ist dabei in den meisten Rechenschritten darauf zurückzuführen, dass der Integrationsalgorithmus mit dem Hinweis auf Radanheben abbricht, wodurch für das reale Fahrzeug die zunehmende Gefahr einer Entgleisung angedeutet wird. Unter technischen Gesichtspunkten sind solche hohen Geschwindigkeiten jedoch irrelevant, eine genauere Untersuchung erübrigt sich damit.

Der in [Seydel94, S. 282] vorgeschlagene Grenzwert der Testfunktion (4.25) für die Monodromiematrix von $EPSL = 0.005$ ist bei diesen Untersuchungen, wie auch bereits bei der Verzweigungsanalyse des Drehgestells, Abb. 6.8 und 6.13, nicht praktikabel. Bei einer Begrenzung auf $EPSL = 0.02$ (vgl. Abb. 7.4 (rechts)) würde der am Ende von Anhang A beschriebene Verfeinerungsalgorithmus die Integrationstoleranzen des Öfteren reduzieren, was wiederum zu einem erheblichen Anstieg der Rechenzeiten führen würde. Im Hinblick auf einen sinnvollen Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Floquet-Multiplikatoren und der erforderlichen Rechenzeiten erweist sich die Wahl von $EPSL = 0.04$ bzw. $EPSL = 0.05$ somit durchaus als geeignet. Daneben ist noch bemerkenswert, dass die große Mehrzahl der Floquet-Multiplikatoren in einem kleinen Gebiet rund um den Ursprung der komplexen Ebene anzutreffen ist und somit die Stabilität des Gesamtsystems nur sehr geringfügig beeinflusst.

Die Qualität der errechneten Grenzzyklen ist beispielhaft mit den Phasenportraits der Querauslenkungen von führendem Radsatz und Wagenkasten in Abb. 7.5 visualisiert. Gezeigt wird das Ergebnis einer externen numerischen Integration bei einer Fahrgeschwindigkeit $v_p = 119.73$ m/s über eine Simulationszeit von $t = 0$ s bis $t = T_{\text{sim}} = 10.0$ s $\approx 36.3 \cdot T_P$, also über mehrere Perioden hinweg. Die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t = 0)$ der Integration

folgen dabei direkt aus einer Pfadverfolgung bis $v = v_p$ und stellen folglich einen Punkt auf einem periodischen Attraktor dar. Das Fehlen jeglicher Übergangsvorgänge in den Phasenportraits bestätigt diesen Sachverhalt eindeutig.

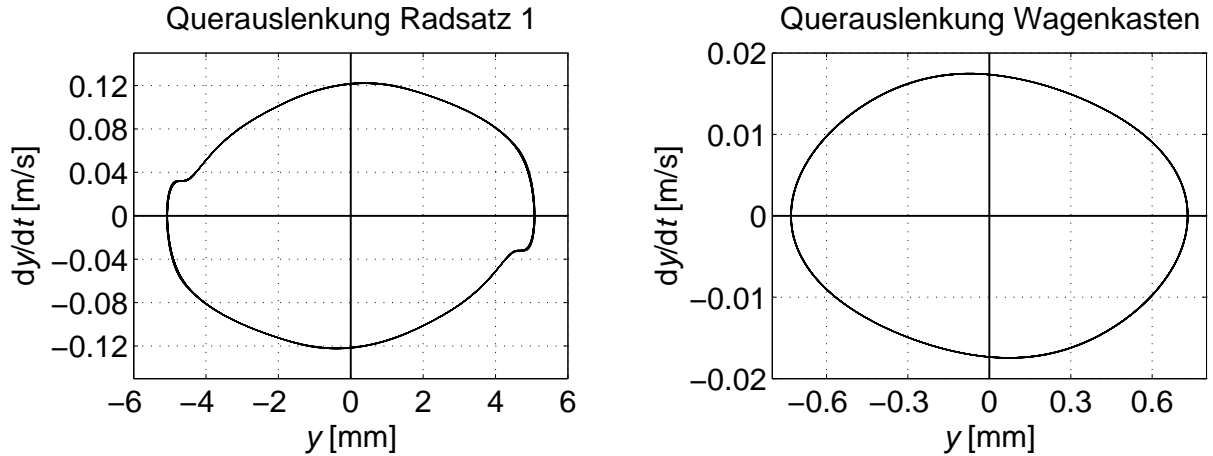


Abbildung 7.5: *Avmz*-Reisezugwagen: Phasenportraits für die Fahrgeschwindigkeit $v_p = 119.73 \text{ m/s}$ als Ergebnis einer externen Integration bis zur Simulationszeit $T_{\text{sim}} = 10.0 \text{ s} \approx 36.3 \cdot T_p$. Die Anfangswerte $\mathbf{y}(t=0)$ folgen direkt aus einer Pfadverfolgung bis zur Geschwindigkeit v_p , vgl. Abb. 7.2.

Um einen Eindruck von dem teilweise doch beträchtlichen Rechenaufwand zu vermitteln, sind in Tab. 7.2 (links) die reinen, von den zentralen Recheneinheiten verbrauchten Rechenzeiten T_{CPU} zur Pfadverfolgung der drei Äste des Verzweigungsdiagramms in Abb. 7.2 aufgeführt (CPU – Central Processing Unit). Die Berechnungen erfolgten auf einem Computer, ausgestattet mit 2 Prozessoren des Typs *Intel Pentium 4* bei einer Taktfrequenz von je 1.7 GHz; übersetzt wurden die Programmbausteine mit dem *Fortran Compaq Compiler* Version v6.1 bei einer mittleren Optimierungsstufe. Insbesondere hängen die Rechenzeiten für eine Verfolgung daneben auch sehr stark von den Einstellungen der Verfahrensparameter ab. Diesbezüglich besonders hervorzuheben sind die Integrationstoleranzen $ATOL/RTOL$ in Zusammenhang mit der Genauigkeit $EPSZ$ und die maximale Schrittweite $HMAX$; die in Tab. 7.1 aufgeführten Einstellungen sind in Bezug auf die Rechenzeit als *nicht* optimiert anzusehen. Neben der Rechenzeit ist in Tab. 7.2 auch noch jeweils die Anzahl N_{step} an erforderlichen Verfolgungsschritten mit angegeben.

Die erforderliche Rechenzeit zur synchronen Integration des nominellen Systems und der Sensitivitätssysteme über eine Periode wird im Wesentlichen von den Integrationstoleranzen $ATOL/RTOL$ bestimmt. Wie Tab. 7.2 (rechts) zeigt, steigen diese Rechenzeiten bei fallender Periodendauer T_p mit dem aktuellen Wert des Verzweigungsparameters Fahrgeschwindigkeit bedeutend an. Der Grund hierfür ist in der zunehmenden Annäherung an den Spurkranz und anschließendem ausgeprägtem Spurkranzkontakt zu sehen.

Das untersuchte Simulationsmodell eines *Avmz*-Reisezugwagens ist in seiner Komplexität als durchaus beispielhaft für industrielle Anwendungen anzusehen. Die Betrachtung des

Ast	stationär	periodisch 1	periodisch 2
N_{step}	70	37	54
$T_{CPU} [s]$	345	9590	25000
$T_{CPU} [h]$	0.1	2.7	6.9

$v [m/s]$	130	175
$T_P [s]$	0.264	0.227
$T_{CPU} [s]$	100	200

Tabelle 7.2: *Links* – Rechenaufwand zur Erzeugung des Verzweigungsdiagramms in Abb. 7.2 mit den Parametereinstellungen aus Tab. 7.1. *Rechts* – Rechenzeit zur Integration des Gesamtsystems über eine Periode bei den Integrationstoleranzen $ATOL = RTOL = 10^{-5}$.

Gesamtfahrzeuges, die differentiell–algebraische Formulierung des Kontaktes zwischen Rad und Schiene als kinematischer Zwang, die Modellierung serieller Feder–Dämpfer–Elemente mit Eigendynamik, nichtlineare Kennlinien von Kraftelementen, die gründliche Modellierung der Längslenker samt Aufhängung usw. verkomplizieren die Modellbildung und die Bewegungsgleichungen zwar erheblich, sind jedoch für eine realistische Nachbildung des Bewegungsverhaltens eine weitgehend unabdingbare Voraussetzung. Mit dieser Untersuchung ist gezeigt, dass die im Rahmen dieser Arbeit entstandene Softwareumgebung zur Pfadverfolgung und Verzweigungsanalyse realistischer und damit zwangsläufig komplexer Simulationsmodelle technischer Systeme – auch aus dem Bereich der industriellen Anwendungen – geeignet ist.

Kapitel 8

Zusammenfassung

„What is missed are reliable algorithms which can be used in MBS programs in order to be able to predict the nonlinear stability limit“ (Zitat von KNOTHE und BÖHM [KnotheBöhm99, S. 309] zur Laufdynamik von Schienenfahrzeugen).

Zur Auslegung und Untersuchung der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen wird bereits seit mehreren Jahren Simulationssoftware unter den industriellen Anforderungen Anwenderfreundlichkeit, Zuverlässigkeit sowie Effizienz bezüglich Modellbildung und Berechnungsabläufen sehr erfolgreich eingesetzt. Ein wichtiges Auslegungskriterium ist dabei die kritische Geschwindigkeit, die bei der Fahrt im geraden, ungestörten Gleis die Geschwindigkeitsbereiche des stationären und des im normalen Fahrbetrieb zu vermeidenden Grenzzyklusverhaltens voneinander trennt. Zu deren sicherer Bestimmung wird, wenn überhaupt, eines von zwei Prinzipien der nichtlinearen Systemanalyse angewendet: Entweder eine konventionelle, auf Zeitschrittintegrationen aufbauende Parametervariation oder eine automatisierte Verzweigungsanalyse. Letztere kombiniert Methoden zur direkten Bestimmung stationärer und periodischer Lösungen der Bewegungsgleichungen mit einer Verfolgung solcher Lösungen im Zustands-Parameter-Raum. Bisherige Untersuchungen beschränken sich jedoch auf die Anwendung der Parametervariation und/oder bauen auf erheblichen Modellvereinfachungen auf: Betrachtet wird beispielsweise nur ein einzelner Radsatz oder ein Drehgestell und die stark nichtlineare Kontaktgeometrie der Verschleißprofile von Rad und Schiene wird durch eine lineare Kegel-auf-Kreis-Profilierung angenähert.

Wie die Anwendung auf das detaillierte, realistische und damit zwangsläufig komplexe Simulationsmodell eines Reisezugwagens zeigt, überwindet die vorliegende Arbeit diese Beschränkungen. Entstanden ist ein Softwarewerkzeug als neues Analyseverfahren innerhalb von SIMPACK zur automatisierten numerischen Verzweigungsanalyse stationärer und periodischer Lösungen allgemeiner mechanischer Systeme. Dabei steht die Anwendbarkeit auf große, komplexe Simulationsmodelle, beispielsweise zur Untersuchung der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen, im Vordergrund.

Durch die enge Verkopplung von einer Modellierungs- und Simulationssoftware für technisch-mechanische Systeme (SIMPACK) mit einem Verzweigungsprogramm (PATH) ist es jetzt möglich, die Verzweigungsanalyse in eine umfassende Fahrzeugauslegung auch im

industriellen Rahmen zu integrieren. Die realistische Nachbildung der Fahrdynamik wird dabei insbesondere auch durch die Berücksichtigung nichtlinearer Verschleißprofile für Rad und Schiene sichergestellt. Der ansonsten unvermeidbare zusätzliche Modellierungs- und/oder Programmieraufwand entfällt, daneben vereinfacht sich der Modellaufbau durch die automatisierte Generierung der Bewegungsgleichungen erheblich.

Die in PATH realisierte Methode der Poincaré–Abbildung zur direkten Bestimmung periodischer Lösungen dynamischer Systeme erfährt durch die integrierte Auswertung der Variationsdifferentialgleichungen eine erhebliche Ausweitung des Anwendungsbereichs. Der bisher im Zuge der Iteration der entsprechenden Bestimmungsgleichungen zur Gradientenberechnung verwendete Ansatz über externe finite Differenzen führt im hier relevanten Fall einer untergeordneten Zeitintegration auf einen systematischen und unkontrollierbaren Fehler, der sich wiederum im divergenten Verhalten des Iterationsalgorithmus niederschlagen kann. Wird dieser Ansatz durch eine integrierte Sensitivitätsanalyse zur direkten Bestimmung des Gradienten der Lösungstrajektorie bezüglich der Anfangsbedingungen ersetzt, ergibt sich dessen kontrollierter Gesamtfehler dagegen in der Größenordnung und damit allein in Abhängigkeit von der Integrationsgenauigkeit.

Die interne Sensitivitätsanalyse zur Berechnung der Sensitivitätsmatrix erfordert die Lösung der n^2 linearen Variationsdifferentialgleichungen. Zum Einsatz kommt hier der erweiterte Anfangswertlöser DAGSL, der deren Integration synchron mit der Integration der Bewegungsgleichungen erlaubt. Aufgrund der relativ großen Dimension des Gesamtsystems von insgesamt $n^2 + n$ Gleichungen treten hierbei Fragen der Effizienz stark in den Vordergrund, weswegen auch die Ausnutzung der Linearität der Sensitivitätsgleichungen von grundlegender Bedeutung ist.

Die Erweiterung auf eine differentiell–algebraische Formulierung der Systemgleichungen erlaubt die dem Stand der Technik entsprechende Beschreibung des Subsystems Radsatz–Gleis bzw. Rad–Schiene als starres Mehrkörpersystem mit kinematisch geschlossener Schleife, eine Problemformulierung, die in der allgemeinen Maschinendynamik häufig anzutreffen ist. Zur direkten Bestimmung periodischer Bewegungen eines solchen MKS eignet sich die Formulierung als Index–3 Randwertproblem, das dann ebenfalls durch die Methode der Poincaré–Abbildung mit integrierter Sensitivitätsanalyse gelöst werden kann. Grundidee dabei ist das Konzept der reduzierten Poincaré–Abbildung, das auf der Bindung des Flusses an die Zwangsmannigfaltigkeit basiert, die wiederum durch die algebraischen Zwangsbedingungen definiert ist. Eine lokale Parametrisierung der Zwangsmannigfaltigkeit führt dazu auf eine lokale Zustandsform der Bewegungsgleichungen und damit auf ein eindeutig lösbares, äquivalentes und reines Differentialgleichungssystem in den Minimalkoordinaten. Dadurch müssen aber auch nur die Sensitivitäten bezüglich der Anfangswerte der Minimalkoordinaten bestimmt werden – eine durchaus bedeutende Einsparung an Rechenzeit.

Bei der Anwendung auf Schienenfahrzeugmodelle erweist sich die Verfolgung des instabil periodischen Astes zwischen der linearen und der nichtlinearen Grenzggeschwindigkeit als sehr schwierig. Zwar sind instabile Bewegungen am realen Fahrzeug nicht nachvollziehbar und die wichtige nichtlineare Grenzggeschwindigkeit (Sattelpunkt) ist auch anderweitig bestimmbar, dennoch ist dieser Ast nicht nur von theoretischem Interesse: Er trennt als

Separatrix die Einzugsbereiche der koexistierenden stabil stationären und der stabil periodischen Lösungen und erlaubt die Gegenrechnung des Sattelpunktes durch Schließen des Gesamtpfades. Dabei ist die eigentliche Verfolgung eines (moderat) instabil periodischen Astes wie gezeigt durchaus möglich, die Schwierigkeit dürfte vielmehr, wie auch in [Hassard00] angedeutet, in der Bestimmung einer ausreichend genauen Anfangsschätzung liegen.

Die Auswertung der insgesamt n^2 bzw. $n^2 + n$ Sensitivitätsgleichungen verbraucht den bei weitem größten Anteil der Rechenzeit der synchronen Integration von Nominal- und Sensitivitätssystem und bestimmt damit entscheidend die Gesamtrechenzeit. Da aber diese Auswertungen je Integrationsschritt in n bzw. $n + 1$ voneinander vollständig unabhängigen, direkt aufeinander folgenden Rechenabläufen durchgeführt werden, bietet sich hier ein sehr guter Ansatzpunkt für eine Parallelisierung. Mit einer der frei verfügbaren software-technischen Umsetzungen des Software-Standards MPI (*Message Passing Interface*), [GroppLuskSkjellum94], wäre beispielsweise eine kostengünstige Möglichkeit zur geeigneten Verknüpfung mehrerer Netzwerkrechner oder der gleichzeitigen Nutzung aller Prozessoren einer Mehrprozessormaschine gegeben.

Die Bestimmung der nichtlinearen Grenzggeschwindigkeit von Schienenfahrzeugen ist natürlich nur einer der denkbaren Anwendungsbereiche einer Verzweigungsanalyse. Das Verzweigungsdiagramm ist ganz allgemein ein bewährtes Hilfsmittel der nichtlinearen Systemdynamik. Die Änderung periodischer Attraktoren in Abhängigkeit von einem Systemparameter, das generelle Auffinden von Verzweigungspunkten und damit verbunden die Fortsetzung koexistierender Lösungsäste bei gleichzeitiger Stabilitätsbewertung sowie die Untersuchung mehrfach-periodischen Verhaltens sind nur einige Stichworte zu weiteren Möglichkeiten einer Systembewertung mittels Verzweigungsanalyse.

Chaotische Bewegungen werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt: Zum einen beschränken sich die Untersuchungen im hier betrachteten Sektor der industriellen Schienenfahrzeugsimulation in der Regel auf stationäres und Grenzzyklusverhalten. Zum anderen existieren keine numerischen Methoden zur direkten Berechnung/Pfadverfolgung chaotischer Bewegungen – in diesem Falle kommt stets die Parametervariation zum Einsatz.

Obgleich diese Arbeit stark auf Erfordernisse hin ausgerichtet ist, die Schienenfahrzeuge an die Simulation und noch mehr an die Modellbildung stellen, ist PATH in Kombination mit den entwickelten Algorithmen innerhalb von SIMPACK zur Verzweigungsanalyse allgemeiner Mehrkörpersysteme mit und ohne Zwangsbedingungen anwendbar. Losgelöst von der MKS-Software ist die Anwendung der wie beschrieben erweiterten PATH-Software auf beliebige dynamische Systeme möglich; letztgenannte Version kann vom Autor dieser Arbeit bei Bedarf zu wissenschaftlichen Zwecken frei zur Verfügung gestellt werden.

Anhang A

Zusammenstellung der wichtigsten Verfahrensparameter

Die Steuerung der numerischen Verfahren des Programmsystems PATH sowie der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen algorithmischen Erweiterungen erfolgt mit Hilfe bestimmter Verfahrensparameter, die jedoch nicht allgemeingültig vorgegeben werden können. Folglich sind vor und während einer Verzweigungsanalyse in einem normalerweise iterativen Prozess diesen Parametern geeignete, problemspezifische Zahlenwerte zuzuordnen. Dabei muss im Rahmen einer Betrachtung der Gesamtheit der jeweils beteiligten Parameter stets ein Kompromiss zwischen ausreichender Genauigkeit der Ergebnisse und der Rechenzeit gefunden werden. In der folgenden Tabelle sind die wesentlichen Parameter zusammengestellt und erklärt; eine vollständige Auflistung wird in [Kaas-Petersen89] gegeben, die Tabelle ist demgegenüber um einige neue Parameter erweitert.

Verfahrensparameter

<i>Parameter</i>	<i>Vorgabe</i>	<i>Lösung</i>	<i>Beschreibung</i>
<i>ATOL</i>	10^{-5}	p	Absolute Fehlertoleranz des Integrationsverfahrens. Diese legt zusammen mit <i>RTOL</i> auf der Basis einer Überprüfung des <i>lokalen</i> Fehlers e_i der Zustandskomponenten $y_i, i = 1, \dots, n_y$, in jedem Integrationsschritt die Genauigkeit der berechneten Lösung fest, siehe [BrenanCampbellPetzold96]. Gefordert wird $ e_i \leq RTOL y_i + ATOL$. Entspricht <i>TOL</i> wenn $ATOL = RTOL$.
<i>RTOL</i>	10^{-5}	p	Relative Fehlertoleranz des Integrationsverfahrens, siehe <i>ATOL</i> ; entspricht <i>TOL</i> wenn $ATOL = RTOL$.

... Fortsetzung

Fortsetzung ...

Parameter	Vorgabe	Lösung	Beschreibung
$NTOL$	10^{-6}	p	Relative Fehlertoleranz des Iterationsverfahrens zur Auswertung der erweiterten inversen Abbildung (5.18) und damit auch zur Berechnung konsistenter Anfangsbedingungen \mathbf{y}_0 sowie konsistenter Anfangssensitivitäten $\partial\mathbf{y}_0/\partial\mathbf{z}_0, \partial\mathbf{y}_0/\partial p$ gemäß Abschnitt 6.2.2. Eine Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems gilt als bestimmt, wenn die <i>euklidische</i> Norm (s.u.) des relativen Fehlers zwischen zwei aufeinander folgenden Iterierten höchstens $NTOL$ beträgt.
$EPSR$	10^{-6}	p	Genauigkeit der Poincaré–Abbildung zur Bestimmung einer periodischen Lösung. Der Fluss $\varphi(t, \mathbf{s})$ befindet sich genau dann mit ausreichender Genauigkeit in der Poincaré–Ebene, wenn die Testfunktion (4.16) $ \Theta_\Sigma(t, \mathbf{s}) \leq EPSR$ erfüllt. Kann auch als ε –Dicke der Poincaré–Ebene interpretiert werden.
$EPSZ$	10^{-4}	s, p	Genauigkeit einer stationären oder periodischen Lösung: Die Grundgleichung (3.3) gilt als gelöst, wenn $\ \mathbf{f}(\mathbf{y})\ \leq EPSZ$ (stationär) bzw. wenn $\ \tilde{\varphi}(T_P, \mathbf{z}_{P,0}) - \mathbf{z}_{P,0}\ \leq EPSZ$ (periodisch) erreicht ist.
$EPSL$	0.02	p	Genauigkeit $\varepsilon_{\mu,r}$ der Testfunktion (4.25) zur Bestimmung des 1.0–Eigenwerts der Monodromiematrix. Dient gleichzeitig auch als Testfunktion zur Bewertung der Güte der Floquet–Multiplikatoren (der $n-1$ verbleibenden Eigenwerte der Monodromiematrix) und damit der Verlässlichkeit der Stabilitätsbewertung einer periodischen Lösung.
$EPSG$	10^{-5}	s, p	Genauigkeit der Lokalisierung eines Verzweigungspunktes, definiert als maximal zulässige Intervalllänge der Nachiteration: $\ (\mathbf{z}^T, p)^{T,j} - (\mathbf{z}^T, p)^{T,j-1}\ \leq EPSG$, siehe Abschnitt 3.2.4. Die Nachiteration wird gestartet, sobald die jeweilige Testfunktion (3.9) bzw. (3.10) einen Vorzeichenwechsel anzeigt.

($\|\cdot\|$ bezeichnet die euklidische Norm, [Stoer99].)

... Fortsetzung

Fortsetzung ...

<i>Parameter</i>	<i>Vorgabe</i>	<i>Lösung</i>	<i>Beschreibung</i>
<i>HMAX</i>	1.0	s, p	Obere Schranke der Schrittweite h^j des Tangenten-Prädiktors (3.5) zur Pfadverfolgung. Je nach Anzahl der erforderlichen Schritte der unmittelbar vorangegangenen Korrektoriteration wird die Schrittweite h^j im Lauf einer Pfadverfolgung erhöht oder erniedrigt, dabei gilt jedoch stets $h^j \leq HMAX$.

Tabelle A.1: Übersicht über die wichtigsten Parameter der in dieser Arbeit entwickelten/ergänzten Verfahren zur Verzweigungsanalyse stationären und periodischen Verhaltens dynamischer Systeme.

Die in obiger Tabelle in der Spalte »Vorgabe« angegebenen Parametereinstellungen sind Erfahrungswerte, die sich bei Anwendung der Verzweigungsanalyse auf unterschiedliche Rad-Schiene-Systeme oftmals als gute Ausgangsbasis für eine optimierende Festlegung herauskristallisiert haben. Ausgehend von diesen Anfangseinstellungen sind im Laufe einer Untersuchung dann den Parametern geeignetere Zahlenwerte im Hinblick auf generelle Durchführbarkeit und/oder Genauigkeit der Ergebnisse und/oder Rechenzeit zuzuweisen. Die in den Kapiteln 6 und 7 angegebenen Parametereinstellungen können ebenfalls als Ausgangswerte bei vergleichbaren Simulationsmodellen herangezogen werden.

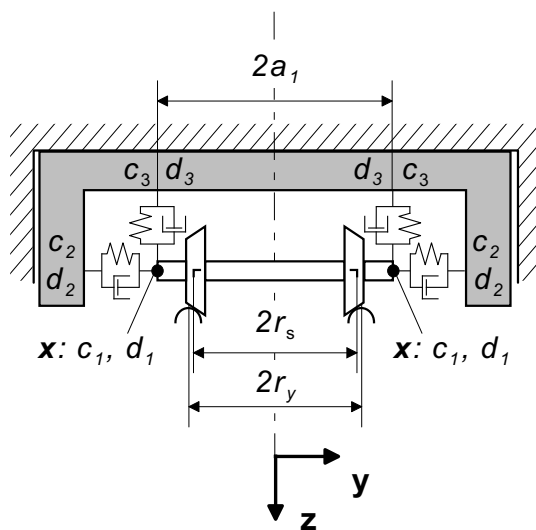
Der Buchstabe „s“ in der Spalte »Lösung« kennzeichnet Parameter, die bei der direkten Bestimmung und Verfolgung *stationärer* Lösungen der Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems zur Anwendung gelangen; entsprechendes gilt für den Buchstaben „p“ und *periodische* Lösungen.

Auf der Grundlage des Parameters *EPSL* werden innerhalb einer Korrektoriteration bei Bedarf die Einstellungen für *ATOL*, *RTOL* und *EPSZ* sukzessiv reduziert, und zwar immer dann, wenn die Testfunktion (4.25) für $\varepsilon_{\mu,r} = EPSL$ nicht erfüllt und somit keine ausreichend genaue Stabilitätsbewertung zu erwarten ist.

Anhang B

Modelldaten der Schienenfahrzeugmodelle

B.1 Einzelradsatz



Geometrie	... [mm]
a_1	
	620.0

Massen / Trägheitsmomente $m \dots [\text{kg}], I_i \dots [\text{kg m}^2]$				Äußere Last [N]
Radsatz				WK/DG
m	I_x	I_y	I_z	F_L
1022.0	678.0	90.0	678.0	$1.233 \cdot 10^5$
WK – Wagenkasten, DG – Drehgestell				

Federsteifigkeiten ... [N/m]			Dämpferkoeffizienten ... [Ns/m]		
c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3
$4.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^5$	$4.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^4$	$2.0 \cdot 10^4$

<i>Federsteifigkeiten</i> ... [N/m]					
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
$1.823 \cdot 10^6$	$3.646 \cdot 10^6$	$3.646 \cdot 10^6$	$1.823 \cdot 10^5$	$3.333 \cdot 10^5$	$2.710 \cdot 10^6$ Nm/rad

<i>Dämpferkoeffizienten</i> ... [Ns/m]	
d_1	d_2
$2.0 \cdot 10^4$	$2.92 \cdot 10^4$

<i>Rad–Schiene–spezifische Parameter: Standardmodell</i>		
Parameter	Einstellung	Bezeichnung
s_w	1435 mm	Spurweite
r_s	750 mm	Radstand ($2 r_s \dots$ Abstand der Messkreisebenen)
R_0	457.2 mm	Nomineller Radradius
$1 : X$	$1 : 40$	Schienen–Einbauneigung
μ	0.15	Reibwert Rad – Schiene

<i>Rad–Schiene–spezifische Parameter: Originalmodell mit Kegel– auf Kreisprofilen</i>		
Parameter	Einstellung	Bezeichnung
r_y	726.5 mm	Laterale Schieneneinbaulage ($2 r_y \dots$ Abstand der Schienenscheitelpunkte)
r_s	716 mm	Radstand ($2 r_s \dots$ Abstand der Messkreisebenen)
R_0	457.2 mm	Nomineller Radradius
$1 : X$	∞	Schienen–Einbauneigung
μ	0.15	Reibwert Rad – Schiene

B.3 Reisezugwagen Avmz

Die folgende Zusammenstellung fahrzeugspezifischer Daten entstammt [ERRI93].

<i>Massen / Trägheitsmomente</i> $m \dots$ [kg], $I_i \dots$ [kg m ²]							
Wagenkasten				Drehgestellrahmen			
m	I_x	I_y	I_z	m	I_x	I_y	I_z
32000.0	56800.0	1970000.0	1970000.0	2615.0	1722.0	1476.0	3087.0
Radsatz				Achslenker			
m	I_x	I_y	I_z	m	I_x	I_y	I_z
1503.0	810.0	112.0	810.0	155.0	2.1	5.6	5.6

Federsteifigkeiten ... [$\cdot 10^3$ N/m]							
Primäraufhängung				Sekundäraufhängung			
c_x	c_y	c_z	c_b	c_x	c_y	c_z	c_b
617.0	617.0	732.0	$7.28 \cdot 10^3$ Nm/rad	160.0	160.0	430.0	$10.5 \cdot 10^3$ Nm/rad

Lagerung Achslenker			Wiegenaufhängung
c_x	c_y	c_z	c_φ
30774.0	3267.0	50000.0	$940.0 \cdot 10^3$ Nm/rad
c_φ	c_ϑ	c_ψ	
$20 \cdot 10^3$ Nm/rad	$10 \cdot 10^3$ Nm/rad	$20 \cdot 10^3$ Nm/rad	

c_x ... Längssteifigkeit	c_φ ... Drehsteifigkeit rollen um x
c_y ... Quersteifigkeit	c_ϑ ... Drehsteifigkeit nicken um y
c_z ... Vertikalsteifigkeit	c_ψ ... Drehsteifigkeit gieren um z
c_b ... Biegesteifigkeit der Feder bzgl. x, y	
Achsrichtungen gemäß Abb. 5.1 auf S. 99	

Queranschlag (sekundär, symmetrisch)										
y_{rel} [mm]	0.0	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$F_Q(y_{rel}) [\cdot 10^3$ N]	0.0	0.0	0.60	1.76	3.73	6.87	11.58	17.17	29.2	230.0
y_{rel}	... Relative Querverschiebung Wagenkasten \rightarrow Drehgestell									
$F_Q(y_{rel})$... Resultierende Federkraft									

Dämpfercharakteristiken (symmetrisch)									
Vertikaldämpfer Primäraufhängung									
v_{rel} [m/s]	0.0	0.04	0.09	0.16	0.28	1.0	10.0	20.0	50.0
$F_D(v_{rel}) [\cdot 10^3 \text{ N}]$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0	8.5	16.8	42.0
$c_s [\cdot 10^3 \text{ N/m}]$	600.0								
Lateraldämpfer Sekundäraufhängung									
v_{rel} [m/s]	0.0	0.03	0.07	0.15	0.305	1.0	10.0	20.0	
$F_D(v_{rel}) [\cdot 10^3 \text{ N}]$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	8.5	66.5	131.5	
$c_s [\cdot 10^3 \text{ N/m}]$	6000.0								
Vertikaldämpfer Sekundäraufhängung									
v_{rel} [m/s]	0.0	0.015	0.08	0.26	1.0	10.0	20.0		
$F_D(v_{rel}) [\cdot 10^3 \text{ N}]$	0.0	1.0	2.0	3.0	7.1	57.1	112.6		
$c_s [\cdot 10^3 \text{ N/m}]$	6000.0								

... Fortsetzung

... Fortsetzung

Dämpfercharakteristiken (symmetrisch)									
Schlingerdämpfer Sekundäraufhängung									
v_{rel} [m/s]	0.0	0.04	0.055	0.11	0.14	1.0	10.0	20.0	
$F_D(v_{rel})$ [$\cdot 10^3$ N]	0.0	7.0	8.0	10.0	11.0	39.7	339.7	673.3	
c_s [$\cdot 10^3$ N/m]	30000.0								
v_{rel}	... Relativgeschwindigkeit zwischen den Koppelpunkten								
$F_D(v_{rel})$... Resultierende Dämpferkraft								
c_s	... Serielle Steifigkeit								
Zusätzliche Dämpfung Lagerung Achslenker ... [Ns/m] bzw. [Nms/rad]									
d_x	d_y	d_z	d_φ	d_ϑ	d_ψ				
$8.0 \cdot 10^4$	$6.0 \cdot 10^3$	$9.0 \cdot 10^3$	$4.0 \cdot 10^2$	$2.0 \cdot 10^2$	$4.0 \cdot 10^2$				

<i>Geometrie der Aufhängungen</i>	
Bezeichnung	Abmessung
Primärfeder	
Halber Längsabstand	1280 mm
Halber Querabstand	1000 mm
Einbauhöhe oberer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	940 mm
Einbauhöhe unterer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	680 mm
Sekundärfeder	
Halber Querabstand	1000 mm
Einbauhöhe oberer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	1130 mm
Einbauhöhe unterer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	525 mm
Vertikaldämpfer Primäraufhängung	
Halber Längsabstand	1550 mm
Halber Querabstand	1000 mm
Einbauhöhe oberer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	880 mm
Einbauhöhe unterer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	480 mm
Lateraldämpfer Sekundäraufhängung	
Halber Querabstand Wagenkasten-seitig	665 mm
Halber Querabstand Drehgestell-seitig	230 mm
Einbauhöhe oberer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	750 mm
Einbauhöhe unterer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	650 mm

... Fortsetzung

Fortsetzung ...

Bezeichnung	Abmessung
Vertikaldämpfer Sekundäraufhängung	
Halber Querabstand Wagenkasten–seitig (oben)	1335 mm
Halber Querabstand Drehgestell–seitig (unten)	1300 mm
Einbauhöhe oberer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	925 mm
Einbauhöhe unterer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	400 mm
Schlingerdämpfer Sekundäraufhängung	
Längsabstand Koppelpunkt Wagenkasten → Drehgestellschwerpunkt	1106 mm
Längsabstand Koppelpunkt Drehgestell → Drehgestellschwerpunkt	230 mm
Halber Querabstand	1410 mm
Einbauhöhe oberer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	630 mm
Einbauhöhe unterer Koppelpunkt (bzgl. Schienenkopf)	525 mm
Queranschlag (sekundär)	
Einbauhöhe (bzgl. Schienenkopf)	650 mm
Lagerung Achslenker (am Drehgestell)	
Halber Längsabstand	830 mm
Halber Querabstand	1000 mm
Einbauhöhe (bzgl. Schienenkopf)	460 mm

<i>Fahrzeugabmessungen</i>	
Bezeichnung	Abmessung
Halber Drehzapfenabstand	9500 mm
Halber Abstand der Radsätze im Drehgestell	1280 mm
Nomineller Radradius	460 mm
Schwerpunktshöhe Drehgestell (bzgl. Schienenkopf)	600 mm
Schwerpunktshöhe Wagenkasten (bzgl. Schienenkopf)	1800 mm
Schwerpunktshöhe Achslenker (bzgl. Schienenkopf)	490 mm
Längsoffset der Schwerpunkte Drehgestell → Achslenker	1200 mm

<i>Rad–Schiene–spezifische Parameter</i>		
Parameter	Einstellung	Bezeichnung
s_w	1435 mm	Spurweite
r_s	750 mm	Radstand ($2r_s \dots$ Abstand der Messkreisebenen)
1 : X	1 : 40	Schienen–Einbauneigung
μ	0.2	Reibwert Rad – Schiene
S1002/UIC60–ORE		Profilpaarung

Anhang C

Ergebnisse der numerischen Untersuchungen

Im Folgenden sind die Ergebnisdaten der in Abschnitt 6.4.3 auf S. 137ff vorgestellten numerischen Untersuchungen der implementierten Verfahren zur Verzweigungsanalyse tabellarisch zusammengefasst. Grundlage der Untersuchungen ist das Standardmodell des Reisezugwagendrehgestells gemäß Anhang B.2. Die Fahrgeschwindigkeit und die Anfangsbedingungen sind so gewählt, dass sich das Fahrzeug in einem Grenzzyklus befindet. Die Verfahrensparameter sind in Anhang A beschrieben.

Genauigkeit der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t)$ Die erste Untersuchungsreihe baut auf der synchronen Integration der Bewegungsgleichungen (5.7) und der VDGL (5.52) bis zum Zeitpunkt $t = T_{\text{sim}} = 0.2305 \text{ s}$ auf (entspricht ungefähr einer Periode der Grenzzyklus-schwingung). Variiert werden die Integrationstoleranzen $ATOL = RTOL \in [10^{-3}; 10^{-8}]$ sowie die Genauigkeit $NTOL \in [10^{-3}; 10^{-9}]$ zur Auswertung der inversen Abbildung (5.18). Die Genauigkeit der Sensitivitätsmatrix wird angenähert durch den relativen Fehler $\varepsilon_{\mu_{\text{max}}}$ des maximalen Eigenwerts μ_{max} der Sensitivitätsmatrix zum Ende der Integration bei $t = T_{\text{sim}}$, die Ergebnisse sind in Tab. C.1 zusammengefasst. Zur Auswertung verwendet wird die Fehlerformel (6.6), Bezugsgröße ist das Ergebnis der Rechnung mit minimalen Toleranzen, $\hat{\mu}_{\text{max}} := \mu_{\text{max}}(ATOL = RTOL = 10^{-8}, NTOL = 10^{-9})$. Zum Vergleich sind in C.2 die analog berechneten relativen Fehler in der Querverschiebung $y_{\text{RS1}}(t = T_{\text{sim}})$ des führenden Radsatzes bezüglich der Gleismittellinie tabelliert.

Genauigkeit der Floquet–Multiplikatoren Auswertung der Testfunktion (4.25) bzw. (6.8) des 1.0–Eigenwerts der Monodromiematrix bei einer Variation der Genauigkeit $EPSZ$ einer periodischen Lösung (definiert nach (5.48)/(6.7)) sowie der Toleranzen $ATOL/RTOL/NTOL$. Es gilt: $EPSZ \in [10^{-2}; 10^{-6}]$, $NTOL \in [10^{-3}; 10^{-9}]$, $ATOL = RTOL = 0.1 \cdot EPSZ$. Dargestellt in Tab. C.3/C.4 sind die Ergebnisse aus den ersten beiden Schritten einer Pfadverfolgung, $ISTEP = 0$, $ISTEP = 1$.

Sensitivitätsmatrix: $\varepsilon_{\mu_{\max}} [\cdot 10^{-2}]$						
$NTOL$	$TOL = ATOL = RTOL$					
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
10^{-3}	6.90255	14.27143	11.00609	10.61113	9.80139	Abbruch
10^{-4}	1.54210	2.15139	1.12620	0.79722	0.83583	0.74168
10^{-5}	1.54210	2.15139	1.12620	0.79722	0.83583	0.74168
10^{-6}	5.35640	2.16243	0.87385	0.57868	0.71011	0.06399
10^{-7}	5.35640	2.16243	0.87385	0.57868	0.71011	0.06399
10^{-8}	5.35640	2.16243	0.87385	0.57868	0.71011	0.06399
10^{-9}	5.35454	2.15773	1.01916	0.57265	0.77612	0.00000
Bezug: $\hat{\mu}_{\max} := \mu_{\max}(TOL=10^{-8}, NTOL=10^{-9}) = 1.01388$						

Tabelle C.1: Zahlenwerte zu Abb. 6.10 (links) auf S. 138: Relativer Fehler $\varepsilon_{\mu_{\max}}$ des betragsmaximalen Eigenwerts der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}(t = T_{\text{sim}})$, berechnet entsprechend der Fehlerformel (6.6).

Querverschiebung Radsatz 1: $\varepsilon_{y_{\text{RS1}}} [\cdot 10^{-2}]$						
$NTOL$	$TOL = ATOL = RTOL$					
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
10^{-3}	2.50318	0.93034	0.12499	0.01709	0.00134	Abbruch
10^{-4}	6.09339	0.93241	0.11429	0.00511	0.00231	0.00006
10^{-5}	6.09339	0.93241	0.11429	0.00511	0.00231	0.00006
10^{-6}	5.37328	1.10823	0.08023	0.01595	0.00176	0.00018
10^{-7}	5.37328	1.10823	0.08023	0.01595	0.00176	0.00018
10^{-8}	5.37328	1.10823	0.08023	0.01595	0.00176	0.00018
10^{-9}	5.37258	1.10826	0.07563	0.01598	0.00098	0.00000
Bezug: $\hat{y}_{\text{RS1}} := y_{\text{RS1}}(TOL=10^{-8}, NTOL=10^{-9}) = 1.92297 \text{ mm}$						

Tabelle C.2: Zahlenwerte zu Abb. 6.10 (rechts) auf S. 138: Relativer Fehler $\varepsilon_{y_{\text{RS1}}}$ der Querverschiebung des führenden Radsatzes, $y_{\text{RS1}}(t = T_{\text{sim}})$, berechnet analog der Fehlerformel (6.6).

ISTEP=0: Testfunktion $\min_i \operatorname{Re}(\mu_i) - 1.0 \quad [\cdot 10^{-2}]$					
<i>NTOL</i>	<i>EPSZ</i>				
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-3}	39.4292	13.6176	10.0427	16.5425	1.61260
10^{-4}	2.8714	0.8373	0.2251	0.6851	0.5997
10^{-5}	2.8741	0.8373	0.2251	0.6686	0.6645
10^{-6}	3.5200	0.8639	0.4793	0.7236	0.4477
10^{-7}	3.5200	0.8639	0.4793	0.7236	0.6633
10^{-8}	3.5119	0.8639	0.4793	0.7236	0.6633
10^{-9}	3.5146	0.8593	0.3099	0.7434	0.5482

Tabelle C.3: Zahlenwerte zu Abb. 6.12 (links) auf S. 140: Auswertung der Testfunktion (6.8) für den *nullten* Schritt einer Pfadverfolgung: ISTEP = 0.

ISTEP=1: Testfunktion $\min_i \operatorname{Re}(\mu_i) - 1.0 \quad [\cdot 10^{-2}]$					
<i>NTOL</i>	<i>EPSZ</i>				
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-3}	11.1084	8.8566	1.3892	10.5175	32.5399
10^{-4}	5.4195	3.4861	1.4908	0.6073	0.5866
10^{-5}	5.4195	3.4861	1.4908	0.7360	0.6493
10^{-6}	5.4818	0.1371	1.1693	0.5620	0.6337
10^{-7}	5.4818	0.1371	1.1693	0.5620	0.7241
10^{-8}	5.5120	0.1371	1.1693	0.5620	0.7241
10^{-9}	5.4901	0.1444	1.0577	0.8697	0.7664

Tabelle C.4: Zahlenwerte zu Abb. 6.12 (rechts) auf S. 140: Auswertung der Testfunktion (6.8) für den *ersten* Schritt einer Pfadverfolgung: ISTEP = 1.

Literaturverzeichnis

- [AhmadianYang98] M. Ahmadian, S. Yang. Hopf Bifurcation and Hunting Behavior in a Rail Wheelset with Flange Contact. *Nonlinear Dynamics*, 15:15–30, 1998.
- [AllgowerGeorg03] E.L. Allgower, K. Georg. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Classics in Applied Mathematics 45. SIAM, Philadelphia, USA, 2003.
- [Arnold00] M. Arnold. Persönliche Mitteilungen sowie Kommentare im DAGSL-Code, 2000.
- [ArnoldNetter97] M. Arnold, H. Netter. Wear Profiles and the Dynamical Simulation of Wheel–Rail Systems. In M. Brøns, M.P. Bendsøe, M.P. Sørensen, editors, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI '96*, S. 77–84. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [AscherMattheijRussell95] U.M. Ascher, R.M.M. Mattheij, R.D. Russell. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Classics in Applied Mathematics 13. SIAM, Philadelphia, USA, 1995.
- [AscherPetzold98] U.M. Ascher, L.R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential–Algebraic Equations*. SIAM, Philadelphia, USA, 1998.
- [AscherSpiteri94] U.M. Ascher, R. Spiteri. Collocation Software for Boundary Value Differential–Algebraic Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15:938–952, 1994.
- [Bestle94] D. Bestle. *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [BestleSeybold92] D. Bestle, J. Seybold. Sensitivity Analysis of Constrained Multibody Systems. *Archive of Applied Mechanics*, 62:181–190, 1992.
- [Bock87] H.G. Bock. *Randwertproblemmethoden zur Parameteridentifizierung in Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen*. Dissertation, Universität Bonn, 1987. Bonner Mathematische Schriften 183.
- [Bremer88] H. Bremer. *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [BrenanCampbellPetzold96] K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold. *Numerical Solution of Initial–Value Problems in Differential–Algebraic Equations*. Classics in Applied Mathematics 14. SIAM, Philadelphia, USA, 1996.

- [BronsteinSemendjajew85] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 22. Auflage, 1985.
- [BuchauerHiltmannKiehl94] O. Buchauer, P. Hiltmann, M. Kiehl. Sensitivity Analysis of Initial-Value Problems with Application to Shooting Techniques. *Numerische Mathematik*, 67:151–159, 1994.
- [CaracotsiosStewart85] M. Caracotsios, W.E. Stewart. Sensitivity Analysis of Initial Value Problems with Mixed ODES and Algebraic Equations. *Computers & Chemical Engineering*, 9(4):359–365, 1985.
- [Cooperrider72] N.K. Cooperrider. The Hunting Behaviour of Conventional Railway Trucks. *ASME J. Eng. Industry*, 94:752–762, 1972.
- [DeuffhardBornemann94] P. Deuffhard, F. Bornemann. *Numerische Mathematik II*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 1994.
- [DIN 5550] DIN 5550: *Fahrtechnische Prüfung und Zulassung von Schienenfahrzeugen*. Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1992.
- [Doedel et al. 97] E.J. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede, X. Wang. AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont). Technical report, Concordia University, Montreal, Canada, 1997.
- [DoedelKellerKernevez91] E.J. Doedel, H.B. Keller, J.P. Kernevez. Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1:745–772, 1991.
- [Eich-SoellnerFührer98] E. Eich-Soellner, C. Führer. *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Teubner, Stuttgart, 1998. (European Consortium for Mathematics in Industry).
- [Eich92] E. Eich. *Projizierende Mehrschrittverfahren zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen technischer Mehrkörpersysteme mit Zwangsbedingungen und Unstetigkeiten*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18, Nr. 109. VDI Verlag, Düsseldorf, 1992.
- [ERRI93] Vehicle Data for 1st Class Avmz Coach with Fiat 0270 Bogies (Appendix 1). In: ERRI B 176/DT 290: B176/3 *Benchmark Problem Results and Assessment*. ERRI – European Rail Research Institute, Utrecht, Holland, 1993.
- [FeeryTolsmaBarton97] W.F. Feery, J.E. Tolsma, P.I. Barton. Efficient Sensitivity Analysis of Large-Scale Differential-Algebraic Systems. *Applied Numerical Mathematics*, 25:41–54, 1997.
- [FisetteSamin94] P. Fisette, J.C. Samin. A new Wheel/Rail Contact Model for Independent Wheels. *Archive of Applied Mechanics*, 64:180–191, 1994.
- [Franke98] C. Franke. *Numerical Methods for the Investigation of Periodic Motions in Multibody System Dynamics: A Collocation Approach*. Dissertation, Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, 1998.

- [Führer88] C. Führer. *Differential-Algebraische Gleichungssysteme in mechanischen Mehrkörpersystemen: Theorie, numerische Ansätze und Anwendungen*. Dissertation, Technische Universität München, Fakultät für Mathematik und Informatik, 1988.
- [GalvanettoBriseghellaBishop97] U. Galvanetto, L. Briseghella, S.R. Bishop. Optimal Axle Distance of a Railway Bogie. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 7(3):721–732, 1997.
- [GargDukkipati84] V.K. Garg, R.V. Dukkipati. *Dynamics of Railway Vehicle Systems*. Academic Press, Toronto Orlando London, 1984.
- [GaschMoelleKnothe84] R. Gasch, D. Moelle, K. Knothe. The Effect of Non-Linearities on the Limit-Cycles of Railway Vehicles. In *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 8th IAVSD-Symposium, Cambridge, USA, 1983*, S. 207–224. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1984.
- [GearGuptaLeimkuhler85] C.W. Gear, G.K. Gupta, B. Leimkuhler. Automatic Integration of Euler–Lagrange Equations with Constraints. *J. Comput. Appl. Math.*, 12/13:77–90, 1985.
- [GolubvanLoan96] G.H. Golub, C.F. van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, USA, 3. Auflage, 1996.
- [Griewank00] A. Griewank. *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Frontiers in Applied Mathematics, 19. SIAM, Philadelphia, USA, 2000.
- [GroppLuskSkjellum94] W. Gropp, E. Lusk, A. Skjellum. *Using MPI: Portable Parallel Programming with the Message Passing Interface*. The MIT Press, Cambridge, USA, 1994. Internet: <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpir> oder <http://www.mpi-forum.org>.
- [Grupp96] F. Grupp. *Parameteridentifizierung nichtlinearer mechanischer Deskriptorsysteme mit Anwendungen in der Rad-Schiene-Dynamik*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8, Nr. 550. VDI Verlag, Düsseldorf, 1996.
- [GuckenheimerHolmes96] J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 5. Auflage, 1996.
- [Hassard00] B. Hassard. An Unusual Hopf Bifurcation: The Railway Bogie. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 10(2):503–507, 2000.
- [Hauschild81] W. Hauschild. *Grenzykelberechnung am nichtlinearen Rad-Schiene-System mit Hilfe der Quasilinearisierung*. Dissertation D83, Fachbereich 12, Verkehrswesen, Technische Universität Berlin, 1981.
- [Hillenbrand93] U. Hillenbrand. *Optimale fahrtechnische Auslegung von Schienenfahrzeugen*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 11, Nr. 188. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993.

- [HolodniokKubicek84] M. Holodniok, M. Kubicek. DERPERS – An Algorithm for the Continuation of Periodic Solutions in Ordinary Differential Equations. *J. of Comp. Physics*, 55:254–267, 1984.
- [Int01] Intec GmbH, Wessling. *SIMPACK Reference*, 2001. Internet: <http://www.simpack.de>.
- [IsaksenTrue97] P. Isaksen, H. True. On the Ultimate Transition to Chaos in the Dynamics of Cooperrider’s Bogie. *Chaos, Solitons and Fractals*, 8(4):559–581, 1997.
- [IsenseeWurm01] S. Isensee, A. Wurm. Bahnforschung im Aufwind: System Schiene 2010 – ein neuer Forschungsschwerpunkt des BMBF. *ETR – Eisenbahntechnische Rundschau*, 50(11):641–646, 2001.
- [Iwnicki99] S. Iwnicki, editor. *The Manchester Benchmarks for Rail Vehicle Simulation*, volume 31 of *Supplement to Vehicle System Dynamics*. Swets & Zeitlinger, Lisse, 1999.
- [Jansen95] W. Jansen. CANDYS/QA: Algorithms, Programs, and User’s Manual. Technischer Bericht, Interdisziplinäres Zentrum für nichtlineare Dynamik, Universität Potsdam, 1995.
- [Jaschinski90] A. Jaschinski. *On the Application of Similarity Laws to a Scaled Railway Bogie Model*. Dissertation, Techn. Universität Delft, 1990. (Auch: Forschungsbericht DLR–FB 90–06, DLR Oberpfaffenhofen, 82230 Wessling).
- [JensenTrue97] C.N. Jensen, H. True. On a New Route to Chaos in Railway Dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 13:117–129, 1997.
- [Johnson85] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [Kaas-Petersen85] C. Kaas-Petersen. *Continuation Methods as the Link between Perturbation Analysis and Asymptotic Analysis*. Manuskript, Institute for Mathematical Modelling, DTU – Danish Technical University, Lyngby, Dänemark, 1985.
- [Kaas-Petersen86] C. Kaas-Petersen. Chaos in a Railway Bogie. *Acta Mechanica*, 61:89–107, 1986.
- [Kaas-Petersen87] C. Kaas-Petersen. Computation, Continuation, and Bifurcation of Torus Solutions for Dissipative Maps and Ordinary Differential Equations. *Physica D*, 25:288–306, 1987.
- [Kaas-Petersen89] C. Kaas-Petersen. *PATH – User’s Guide*. University of Leeds, Department of Applied Mathematical Studies & Center for Nonlinear Studies, Leeds, 1989.
- [Kalker90] J.J. Kalker. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1990.

- [KikPiotrowski86] W. Kik, J. Piotrowski. A Fast, Approximate Method to Calculate Normal Load at Contact between Wheel and Rail and Creep Forces during Rolling. In I. Zobory, editor, *2nd Miniconference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Budapest, 1986*, S. 52–61. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1986.
- [KnotheBöhm99] K. Knothe, F. Böhm. History of Stability of Railway and Road Vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 31:283–323, 1999.
- [KnudsenFeldbergJaschinski91] C. Knudsen, R. Feldberg, A. Jaschinski. Non-Linear Dynamic Phenomena in the Behaviour of a Railway Wheelset Model. *Nonlinear Dynamics*, 2:389–404, 1991.
- [KortümLugner94] W. Kortüm, P. Lugner. *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [KortümSharp93] W. Kortüm, R.S. Sharp, editors. *Multibody Computer Codes in Vehicle System Dynamics*, volume 22 of *Supplement to Vehicle System Dynamics*. Swets & Zeitlinger, Amsterdam and Lisse, 1993.
- [KuznetsovLevitin97] Y.A. Kuznetsov, V.V. Levitin. CONTENT: A Multiplatform Environment for Continuation and Bifurcation Analysis of Dynamical Systems. Technical report, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, 1997.
- [Lamour97] R. Lamour. A Shooting Method for Fully Implicit Index-2 Differential-Algebraic Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18:94–114, 1997.
- [Leister92] G. Leister. *Beschreibung und Simulation von Mehrkörpersystemen mit geschlossenen kinematischen Schleifen*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 11, Nr. 167. VDI Verlag, Düsseldorf, 1992.
- [LustRoose98] K. Lust, D. Roose. Computation and Bifurcation Analysis of Periodic Solutions of Large-Scale Systems. In *Large Scale Dynamical Systems*, IMA-Volumes in Mathematics and its Applications. IMA – Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, USA, 1998. (Preprint).
- [LustRooseSpenceChampneys98] K. Lust, D. Roose, A. Spence, A.R. Champneys. An Adaptive Newton-Picard Algorithm with Subspace Iteration for Computing Periodic Solutions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(4):1188–1209, 1998.
- [MalyPetzold96] T. Maly, L.R. Petzold. Numerical Methods and Software for Sensitivity Analysis of Differential-Algebraic Systems. *Applied Numerical Mathematics*, 20:57–79, 1996.
- [Mauer88] L. Mauer. *Die modulare Beschreibung des Rad/Schiene-Kontaktes im linearen Mehrkörperformalismus*. Dissertation, Technische Universität Berlin, Fachbereich Verkehrswesen, 1988.

- [Meijaard91] J.P. Meijaard. *Dynamics of Mechanical Systems: Algorithms for a Numerical Investigation of the Behaviour of Non-Linear Discrete Models*. Dissertation, Technische Universität Delft, Niederlande, 1991.
- [NayfehBalachandran95] A.H. Nayfeh, B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. John Wiley and Sons, Chichester New York, 1995.
- [Netlib] Netlib Repository. Internet: <http://www.netlib.org>.
- [Netter98] H. Netter. *Rad-Schiene-Systeme in differential-algebraischer Darstellung*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 12, Nr. 352. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [NetterSchuppRulkaSchroeder98] H. Netter, G. Schupp, W. Rulka, K. Schroeder. New Aspects of Contact Modelling and Validation within Multibody System Simulation of Railway Vehicles. In *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 15th IAVSD-Symposium, Budapest, 1997*. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1998.
- [OfierzynskiBrundisch00] M. Ofierzynski, V. Brundisch. Fahrkomfort von Schienenfahrzeugen – Die Zuverlässigkeit moderner Simulationstechnik. *ZEV + DET Glasers Annalen*, 124(2/3):109–119, 2000.
- [Osinga97] H. Osinga. Software for Dynamical System Theory. Internet-Link-Sammlung: <http://www.enm.bris.ac.uk/staff/hinke/dss/index.html>, 1997.
- [ParkerChua89] T.S. Parker, L.O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [PoppSchiehlen93] K. Popp, W. Schiehlen. *Fahrzeugdynamik: Eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug – Fahrweg*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [PotraRheinboldt91] F.A. Potra, W.C. Rheinboldt. On the Numerical Solution of Euler-Lagrange Equations. *Mechanics of Structures and Machines*, 19:1–18, 1991.
- [PTMVBW01] Projektträger Mobilität und Verkehr Bauen und Wohnen des BMBF. Internet: <http://www.tuvpt.de>, 2001.
- [RathStriberskyMüller97] B. Rath, A. Stribersky, H. Müller. Der Komfortzug – ein innovatives Neigetechnik-Konzept. *ZEV + DET Glasers Annalen*, 121(5):320–329, 1997.
- [Rheinland01] TÜV Rheinland. Neue Grundlagen für Zusammenarbeit zwischen Deutscher Bahn AG und BMBF (Forschungsinitiative Schiene). *ETR – Eisenbahntechnische Rundschau*, 50(1/2):72–73, 2001.
- [Rulka98] W. Rulka. *Effiziente Simulation der Dynamik mechatronischer Systeme für industrielle Anwendungen*. Dissertation, Techn. Universität Wien, 1998. (Auch: Interner Bericht IB 532-01-06, DLR Oberpfaffenhofen, 82230 Wessling).
- [SauvagePascal90] G. Sauvage, J.P. Pascal. Solution of the Multiple Wheel and Rail Contact Dynamic Problem. *Vehicle System Dynamics*, 19:257–272, 1990.

- [Schiehlen86] W. Schiehlen. *Technische Dynamik*. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [Schiehlen90] W. Schiehlen, editor. *Multibody Systems Handbook*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1990.
- [SchmidtMauer82] A. Schmidt, L. Mauer. Durchführung der Rollprüfstands-Versuche. Abschlussbericht zum BMFT-Forschungsvorhaben TV 7960 4. Bericht K 096 991 – EDS – 9. April 1982. Technischer Bericht, MAN Neue Technologie, München, 1982.
- [SchroederKortüm00] K. Schroeder, W. Kortüm. Einsatz von Identifikationsmethoden zur Integration von Simulation und Versuch bei fahrdynamischen Untersuchungen. *VDI Berichte*, 1559:743–764, 2000.
- [SchulzBockSteinbach98] V.H. Schulz, H.G. Bock, M.C. Steinbach. Exploiting Invariants in the Numerical Solution of Multipoint Boundary Value Problems for DAE. *SIAM J. Sci. Comp.*, 19(2):440–467, 1998.
- [Schupp96] G. Schupp. Different Contact Models for Wheel–Rail Systems: A Comparison. Interner Bericht IB 515-96-22, DLR – Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt Oberpfaffenhofen, 82230 Wessling, 1996.
- [SchuppJaschinski99] G. Schupp, A. Jaschinski. Virtual Prototyping: The Future Way of Designing Railway Vehicles. *Int. J. of Vehicle Design*, 22(1/2):93–115, 1999.
- [SchuppSchroederJaschinskiRöbke98] G. Schupp, K. Schroeder, A. Jaschinski, G. Röbke. Berechnungen zur Laufsicherheit von Güterwagen unter Längsdruckkräften. Technischer Bericht RP 59 Teil 1 – 6, ERRI – European Rail Research Institute, 3511 MK Utrecht, Niederlande, 1996–1998.
- [SchwertassekWallrapp99] R. Schwertassek, O. Wallrapp. *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.
- [Seydel94] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis: From Equilibrium to Chaos*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [Seydel99] R. Seydel. *BIFPACK – a Program for Continuation, Bifurcation and Stability*. Lehrstuhl für angewandte Mathematik, Universität Ulm, 1999.
- [ShenHedrickElkins84] Z.Y. Shen, J.K. Hedrick, J.A. Elkins. A Comparison of Alternative Creep Force Models for Rail Vehicle Dynamics. In *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 8th IAVSD-Symposium, Cambridge, USA, 1983*, S. 591–605. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1984.
- [Slivsgaard95] E.C. Slivsgaard. *On the Interaction between Wheels and Rails in Railway Dynamics*. Dissertation, DTU - Technical University of Denmark, IMM - Institute for Mathematical Modelling, Lyngby, Dänemark, 1995.

- [SlivsgaardTrue97] E. Slivsgaard, H. True. Dynamics of a Single-Axle Steered Bogie. In D.H. van Campen, editor, *IUTAM Symposium on Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems*, S. 375–382. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997.
- [Stichel01] S. Stichel. Limit Cycle Behaviour and Chaotic Motions of Two-Axle Freight Wagons with Friction Damping. In *EUROMECH Colloquium 427: Computational Techniques and Applications in Nonlinear Dynamics of Structures and Multibody Systems*, Cachan, Frankreich, 24.–27. September 2001.
- [Stoer99] J. Stoer. *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 8. Auflage, 1999.
- [StoerBulirsch00] J. Stoer, R. Bulirsch. *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage, 2000.
- [StriberskyMoserRulka00] A. Stribersky, F. Moser, W. Rulka. Structural Dynamics of Rail Vehicle Systems: A Virtual Systems Approach. In *5th International Conference on Computational Structures Technology, Leuven, Belgium*, 2000.
- [TanifujiNagai96] K. Tanifuji, K.I. Nagai. Chaotic Oscillation of a Wheelset Rolling on Rail; Verification on Roller Rig. *Vehicle System Dynamics Supplement*, 25:682–693, 1996.
- [ThompsonStewart86] J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1986.
- [True92] H. True. Railway Vehicle Chaos and Asymmetric Hunting. In *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 12th IAVSD-Symposium, Lyon, France, 1991*, S. 625–637. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1992.
- [True93] H. True. Some Recent Developments in Nonlinear Railway Vehicle Dynamics. In E. Kreuzer, G. Schmidt, editors, *1st European Nonlinear Oscillations Conference, Hamburg, 1993*, S. 129–148. Akademie Verlag Berlin, 1993.
- [True99] H. True. On the Theory of Nonlinear Dynamics and its Applications in Vehicle System Dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 31:393–421, 1999.
- [TrueJensen94] H. True, J.C. Jensen. Parameter Study of Hunting and Chaos in Railway Vehicle Dynamics. In *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 13th IAVSD-Symposium, Chengdu, China, 1993*, S. 508–521. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1994.
- [VermeulenJohnson64] P.J. Vermeulen, K.L. Johnson. Contact of Nonspherical Bodies Transmitting Tangential Forces. *Journal of Applied Mechanics*, 31:338–340, 1964.
- [Vohla96] G.K.W. Vohla. *Werkzeuge zur realitätsnahen Simulation der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 12, Nr. 270. VDI Verlag, Düsseldorf, 1996.

- [WehageHaug82] R.A. Wehage, A.J. Haug. Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems. *J. of Mech. Design*, 104:247–255, 1982.
- [Wickens65] A.H. Wickens. The Dynamic Stability of Railway Vehicle Wheelsets and Bogies Having Profiled Wheels. *Int. Journal of Solids and Structures*, 1:319–341, 1965.
- [Wiggins90] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990.
- [WulffHohmannnDeuffhard94] C. Wulff, A. Hohmannn, P. Deuffhard. Numerical Continuation of Periodic Orbits with Symmetry. Preprint SC 94–12, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, 1994. Internet: <http://www.math.fu-berlin/~Dynamik/preprints>.
- [XuSteindlTroger92] G. Xu, A. Steindl, H. Troger. Nonlinear Stability Analysis of a Bogie of a Low-Platform Wagon. In *The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 12th IAVSD-Symposium, Lyon, France, 1991*, S. 653–665. Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam and Lisse, 1992.